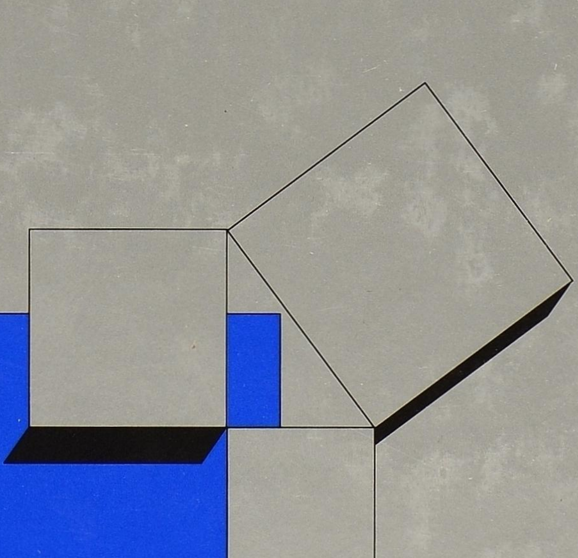
W.I. Smirnow

Lehrbuch der höheren Mathematik

Teil III/2



Verlag Harri Deutsch

W. I. SMIRNOW

LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK TEIL III/2

W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik

Teil I
unveränderter Nachdruck der 16. Auflage 1990, 2004, 449 Seiten, 190 Abb., geb.,
ISBN-13 978-3-8171-1297-5 (ISBN-10 3-8171-1297-1)
Funktionale Abhängigkeit und Theorie der Grenzwerte – Der Begriff der Ableitung und seine Anwendungen – Der Begriff des Integrals und seine Anwendungen – Reihen und ihre Anwendung auf die näherungsweise Berechnung von Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher – Komplexe Zahlen. Anfangsgründe der höheren Algebra und Integration von Funktionen

Teil II
unveränderter Nachdruck der 17. Auflage 1990, 2005, 618 Seiten, 136 Abb., geb.,
ISBN-13 978-3-8171-1298-2 (ISBN-10 3-8171-1298-X)
Gewöhnliche Differentialgleichungen – Lineare Differentialgleichungen und ergänzende Ausführungen zur Theorie der Differentialgleichungen – Mehrfache und Kurvenintegrale. Vektoranalysis und Feldtheorie – Anfangsgründe der Differentialgeometrie – Fourierreihen – Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik

Teil III/1
unveränderter Nachdruck der 12. Aufl. 1991, 2006, 283 Seiten, 3 Abb., geb.,
ISBN-13 978-3-8171-1299-9 (ISBN-10 3-8171-1299-8)
Determinanten und die Auflösung von Gleichungssystemen – Lineare Transformationen und quadratische Formen – Elemente der Gruppentheorie und lineare Darstellung von Gruppen

Teil III/2
unveränderter Nachdruck der 13. Auflage 1987, 2006, 599 Seiten, 85 Abb., geb.,
ISBN-13 978-3-8171-1300-2 (ISBN-10 3-8171-1300-5)
Anfangsgründe der Funktionentheorie – Konforme Abbildung und ebene Felder – Anwendungen der Residuentheorie – Ganze und gebrochene Funktionen – Funktionen mehrerer Veränderlicher und von Matrizen – Lineare Differentialgleichungen – Spezielle Funktionen der mathematischen Physik – Reduktion von Matrizen auf kanonische Form

Teil IV/1
unveränderter Nachdruck der 6. Auflage 1988, 2004, 300 Seiten, 4 Abb., geb.,
ISBN-13 978-3-8171-1301-9 (ISBN-10 3-8171-1301-3)
Integralgleichungen – Variationsrechnung – Ergänzungen zur Theorie der Funktionenräume. Verallgemeinerte Ableitungen. Ein Minimalproblem für quadratische Funktionale

Teil IV/2
unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1989, 2006, 469 Seiten, 16 Abb., geb.,
ISBN-13 978-3-8171-1302-6 (ISBN-10 3-8171-1302-1)
Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen – Randwertprobleme

Teil V
unveränderter Nachdruck der 11. Auflage 1991, 2005, 545 Seiten, 3 Abb., geb.,
ISBN-13 978-3-8171-1303-3 (ISBN-10 3-8171-1303-X)
Das Stieltjessche Integral – Mengenfunktionen und das Lebesguesche Integral – Mengenfunktionen. Absolute Stetigkeit. Verallgemeinerung des Integralbegriffs – Metrische und normierte Räume – Der Hilbertsche Raum

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:
W. I. Smirnow, Lehrbuch der höheren Mathematik
ISBN-13 978-3-8171-1419-1 (ISBN-10 3-8171-1419-2)

LEHRBUCH DER HÖHEREN MATHEMATIK

VON

W. I. SMIRNOW
MITGLIED DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

TEIL III/2

Verlag
Harri
Deutsch

Titel der Originalausgabe

В.И. Смирнов
Курс высшей математики, Том 3, Часть 2
Москва-Ленинград 1949

Bibliographische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN-10 3-8171-1300-5
ISBN-13 978-3-8171-1300-2

Unveränderter Nachdruck der 13. Auflage 1987, 2006

Druck: betz-druck GmbH, Darmstadt

Printed in Germany

Geleitwort des Verlages

Der Verlag Harri Deutsch hat zu erheblichen Teilen die Tradition übernommen, wichtige Titel des mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereichs russischer Autoren in deutscher Sprache weiterzuführen oder neu zu erschließen. So werden wir auch dieses schon klassisch gewordene Lehrbuch der höheren Mathematik weiter komplett lieferbar halten. Für Hinweise auf Druckfehler und Verbesserungs- oder Ergänzungsvorschläge der Benutzer sind wir stets dankbar und erbitten diese an:

Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch
Gräfstraße 47
60486 Frankfurt am Main
E-Mail: verlag@harri-deutsch.de
http://www.harri-deutsch.de/verlag/

INHALTSVERZEICHNIS

Kap. I. Anfangsgründe der Funktionentheorie

Kap. II. Konforme Abbildung und ebene Felder

I. Anfangsgründe der Funktionentheorie

1. Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Bei der Behandlung der Differential- und Integralrechnung haben wir vorausgesetzt, daß sowohl die unabhängigen Variablen als auch die Funktionen nur reelle Werte annehmen. Bei der Darlegung der höheren Algebra haben wir nur die einfachsten Funktionen – die Polynome – auch für komplexe Werte der unabhängigen Variablen betrachtet. Das Ziel des folgenden Kapitels ist nun die Ausdehnung der Elemente der Analysis auf Funktionen einer komplexen Variablen.

Betrachten wir z. B. das Polynom

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n,$$

wobei die a_k gegebene komplexe Zahlen sind. Wir wollen annehmen, daß auch die unabhängige Variable z beliebige komplexe Werte durchläuft; dann ist $f(z)$ für beliebige komplexe Werte z definiert. Das gleiche gilt für rationale Funktionen (soweit der Nenner von Null verschieden ist)

$$\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}$$

oder selbst für Ausdrücke mit Radikalen, wie z. B.

$$\sqrt{z-1}.$$

Im Kapitel VI des ersten Teiles haben wir die elementaren transzendenten Funktionen für komplexe Werte der unabhängigen Variablen angegeben. Für die Exponentialfunktion gilt

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Mit Hilfe dieser Definition von e^z lassen sich die trigonometrischen Funktionen für komplexe Werte des Argumentes definieren:

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \\ \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{i2z} - 1}{e^{i2z} + 1}; \\ \operatorname{ctg} z &= \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{i2z} + 1}{e^{i2z} - 1}. \end{aligned} \right.$$

Für den natürlichen Logarithmus einer komplexen Zahl hatten wir den Ausdruck

$$\text{(2)} \qquad \log z = \log |z| + i \arg z,$$

wobei $|z|$ der Absolutbetrag ist und $\arg z$ das Argument der Veränderlichen z

bezeichnet. Betrachten wir die zu (1) inversen Funktionen, so kommen wir zu den Umkehrungen der Kreisfunktionen einer komplexen Variablen:

$$\operatorname{arc}\sin z\,,\quad \operatorname{arc}\cos z\,,\quad \operatorname{arc}\operatorname{tg} z\,,\quad \operatorname{arc}\operatorname{ctg} z\,.$$

Man zeigt mühelos, daß diese Funktionen durch Logarithmen ausgedrückt werden können. Nehmen wir z. B.

$$z = \operatorname{tg} w = \frac{e^{i2w} - 1}{i\,(e^{i2w} + 1)}\,,$$

so gilt

$$i\,(e^{i2w} + 1)\,z = e^{i2w} - 1$$

oder

$$e^{i2w} = \frac{1 + iz}{1 - iz}\,.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit i und logarithmiert, so erhält man

$$w = \operatorname{arc}\operatorname{tg} z = \frac{1}{2i}\log\frac{i - z}{i + z}\,.$$

Entsprechend bekommt man, ausgehend von

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}\,,$$

eine quadratische Gleichung in e^{iw}:

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0\,;$$

dann gilt

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

und folglich

$$w = \operatorname{arc}\sin z = \frac{1}{i}\log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),$$

wobei man beide Werte der Quadratwurzel berücksichtigen muß.

Weiter werden wir sehen: Alle oben genannten elementaren Funktionen besitzen als Funktionen einer komplexen Veränderlichen eine Ableitung, d. h., für sie existiert ein endlicher Grenzwert des Quotienten

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}\,,$$

wenn die komplexe Größe Δz gegen Null strebt. In diesem ersten Kapitel entwickeln wir die Anfangsgründe der Theorie der differenzierbaren Funktionen einer komplexen Variablen. Wir werden sehen, daß sich diese Theorie einerseits durch außerordentlich große Klarheit und Einfachheit auszeichnet und andererseits breite Anwendungen in vielen Gebieten der Naturwissenschaft und Technik hat. In diesem Kapitel geben wir einen kurzen Abriß der Theorie selbst. Den Anwendungen sind die folgenden Kapitel gewidmet. Wir hoffen, auf diesem Wege eine *klarere* und *vollständigere* Darstellung der theoretischen Grundlagen zu erreichen.

Im folgenden werden wir sehr oft von der geometrischen Deutung der komplexen Zahlen Gebrauch machen, die wir schon in [I, 170] besprochen haben.

Wir erinnern kurz an die grundlegenden Ideen dieser Interpretation: Führt man in der Ebene geradlinig-rechtwinklige Achsen OX, OY ein, so kann man entweder jedem Punkt dieser Ebene zwei reelle Koordinaten x, y oder eine komplexe Koordinate $x + iy$ zuordnen, wie wir es hernach auch tun werden. Die Ebene heißt in diesem Sinne Ebene der komplexen Veränderlichen (kurz: komplexe Ebene), die X-Achse die reelle und die Y-Achse die imaginäre Achse. Außer dieser Punktdarstellung der komplexen Zahlen werden wir in den folgenden Kapiteln hauptsächlich die Vektordarstellung benutzen, und zwar ordnen wir der komplexen Zahl $x + iy$ den Vektor zu, dessen Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen gleich x bzw. y sind. Der Zusammenhang der beiden Darstellungen ist unmittelbar klar; es gilt nämlich folgendes: Dem Vektor, der vom Koordinatenursprung zum Punkt mit der komplexen Koordinate $x + iy$ führt, entspricht eben diese komplexe Zahl $x + iy$. Liegt ferner in unserer Ebene ein Vektor, dessen Anfangspunkt der Punkt A mit der Koordinate $a_1 + ia_2$ und dessen Endpunkt der Punkt B mit der Koordinate $b_1 + ib_2$ ist, so entspricht diesem Vektor $\overrightarrow{AB}$ die komplexe Zahl, die gleich der Differenz der Koordinaten des End- und des Anfangspunktes ist:

$$(b_1 - a_1) + i\,(b_2 - a_2)\,.$$

Wir erinnern an einige früher behandelte Resultate [**I, 171** und **172**]:

Der Addition der komplexen Zahlen entspricht die geometrische Addition der diesen Zahlen entsprechenden Vektoren. Der absolute Betrag einer komplexen Zahl ist gleich der Länge des zugeordneten Vektors und das Argument gleich dem Winkel, den der Vektor mit der X-Achse bildet. Ändert sich die komplexe Variable z, so bewegt sich der entsprechende Punkt in der Ebene.

Wir wollen sagen, daß $z = x + iy$ gegen den Grenzwert $\alpha = a + ib$ strebt, wobei a und b reelle Konstanten sind, wenn der Betrag der Differenz

$$|\alpha - z| = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2}$$

gegen Null strebt. Aus der angegebenen Relation folgt unmittelbar, da ja unter der Wurzel eine nicht-negative Summe steht, daß $|\alpha - z| \to 0$ gleichbedeutend mit

$$x \to a \quad \text{und} \quad y \to b$$

ist. Folglich ist

$$x + iy \to a + ib$$

gleichbedeutend mit

$$x \to a \quad \text{und} \quad y \to b\,.$$

Dabei strebt offensichtlich der veränderliche Punkt M, dem die Zahl $z = x + iy$ entspricht, gegen den Punkt A mit der Koordinate $\alpha = a + ib$ als Grenzlage. Wie man mühelos zeigt, gelten für komplexe Veränderliche die üblichen Sätze über Summen, Produkte und Quotienten von Grenzwerten; damit werden wir uns aber nicht aufhalten.

Wir merken noch an, daß aus der Definition des Grenzwertes folgt, daß $z \to 0$ gleichbedeutend mit $|z| \to 0$ ist. Ferner gilt bei $z \to \alpha$ offenbar $|z| \to |\alpha|$. Für komplexe Variable gilt auch das CAUCHYsche Kriterium für die Existenz des Grenzwertes. Sei z. B. eine abzählbare Folge von komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1\,; \\ z_2 &= x_2 + iy_2\,; \\ &\ldots\ldots\ldots\,; \\ z_n &= x_n + iy_n\,; \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

vorgegeben. Die Existenz eines Grenzwertes z dieser Folge ist gleichbedeutend mit derjenigen der Grenzwerte x und y der reellen Folgen x_n und y_n; für die Existenz dieser Grenzwerte ist aber notwendig und hinreichend, daß die absoluten Beträge der Differenzen $|x_n - x_m|$ und $|y_n - y_m|$ für genügend große n und m beliebig klein werden [**I**, **31**]. Berücksichtigt man

$$|z_n - z_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}$$

und die Tatsache, daß unter der Wurzel eine nicht-negative Summe steht, so sieht man, daß für die Existenz eines Grenzwertes der Folge z_n notwendig und hinreichend ist, daß für alle hinreichend großen n und m die Zahl $|z_n - z_m|$ beliebig klein gemacht werden kann. Genau gesagt, heißt das: Zu beliebig vorgegebenem positivem ε existiert ein N derart, daß $|z_n - z_m| < \varepsilon$ ist, wenn nur n und m größer als N sind. Auch für den allgemeinen Fall einer komplexen Variablen bleibt alles gültig, was wir am Anfang des Abschnittes [**25**] von Teil I über reelle Variable gesagt haben. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Grenzwertes der komplexen Variablen z ist die folgende [**I**, **31**]: Es gibt zu beliebig vorgegebenem positivem ε einen Wert der Variablen z derart, daß $|z' - z''| < \varepsilon$ ist, sobald z' und z'' zwei beliebige Werte sind, die auf diesen Wert von z folgen[1]). Weiter werden wir sagen, daß die komplexe Variable z gegen Unendlich strebt, wenn $|z| \to +\infty$ gilt.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung von Funktionen einer komplexen Variablen,

$$w = f(z),$$

über und treffen einige terminologische Verabredungen. Die Funktion $f(z)$ kann entweder in der ganzen Ebene oder nur in einem gewissen Bereich der komplexen Ebene definiert sein, z. B. innerhalb eines Kreises oder Rechtecks oder Ringes usw. Bei allen diesen Bereichen unterscheiden wir zwischen ihren inneren und ihren Randpunkten. So sind z. B. bei einem Kreise mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und dem Radius 1 die inneren Punkte durch die Bedingungen

$$|z| < 1 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 < 1$$

charakterisiert, und der Rand ist der Kreis

$$|z| = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Die charakteristische Eigenschaft der inneren Punkte ist, daß es zu ihnen stets eine gewisse Umgebung gibt, die auch noch ganz dem Bereich angehört, d. h., ein Punkt M ist innerer Punkt eines Bereichs, wenn dieser einen hinreichend kleinen Kreis um M ganz enthält. Die Randpunkte sind keine inneren Punkte des Bereichs, aber in jeder beliebig kleinen Umgebung eines Randpunktes liegen innere Punkte. Außerdem werden wir annehmen, daß unser Bereich nicht in getrennte Stücke zerfällt, oder, anders ausgedrückt, wir werden voraussetzen, daß je zwei beliebige Punkte des Bereichs durch einen ganz in seinem Innern verlaufenden Weg verbindbar sind. Im folgenden verstehen wir unter *Gebiet* nur *die Gesamtheit der inneren Punkte* eines Bereichs. Wenn zum Gebiet auch der Rand hinzugenommen wird, so sprechen wir von einem *abgeschlossenen Bereich*. Ferner heißt ein Gebiet *beschränkt*, wenn der Abstand jedes seiner Punkte vom Nullpunkt unterhalb einer festen endlichen Grenze liegt. Später geben wir noch eine schärfere Definition des Begriffes „Gebiet".

[1]) Hier wird die Veränderliche z als Funktion eines Parameters aufgefaßt, der eine geordnete Menge durchläuft; auf deren Ordnung bezieht sich das „folgen" (Anm. d. Red.).

Wir kehren nun zur Betrachtung der Funktion $w = f(z)$ zurück und nehmen an, diese sei im Innern eines gewissen Bereiches B definiert, d. h., in allen Punkten z, die in B liegen, nehme $f(z)$ bestimmte komplexe Werte an (wir sprechen von eindeutigen Funktionen). Sei z_0 ein (innerer) Punkt von B. Die Funktion $f(z)$ heißt im Punkt z_0 stetig, wenn $f(z) \to f(z_0)$ für $z \to z_0$ gilt, d. h. zu beliebig vorgegebenem positivem ε ein positives η derart existiert, daß $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ist, wenn nur $|z - z_0| < \eta$ gilt. Eine Funktion heißt stetig in B, wenn sie in allen Punkten von B stetig ist. Es kann sein, daß die Funktion $f(z)$ nicht nur im Innern von B, sondern auch auf der Begrenzung l des Gebietes, d. h. im abgeschlossenen Bereich B definiert ist. Wir sagen dann, diese Funktion sei im abgeschlossenen Bereich stetig, wenn sie in jedem Punkt von B stetig ist. Bei der Definition der Stetigkeit in irgendeinem Punkt z_0 des Randes l muß man beachten, daß der Punkt z auf beliebige Weise gegen z_0 streben kann, dabei aber den abgeschlossenen Bereich B nicht verlassen darf. Ebenso wie im Reellen gilt der Satz [**I**, **43**]: Ist $f(z)$ in einem beschränkten abgeschlossenen Bereich stetig, so ist $f(z)$ in diesem Bereich gleichmäßig stetig, d. h., zu beliebig vorgegebenem positivem ε existiert ein positives η derart, daß $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ ist, wenn nur $|z_1 - z_2| < \eta$ gilt und z_1 und z_2 in diesem abgeschlossenen Bereich liegen. Wir zerlegen jetzt z und $w = f(z)$ in Real- und Imaginärteil und schreiben

$$z = x + iy;$$

$$w = f(z) = u + iv.$$

Die Vorgabe von z ist gleichbedeutend mit der von x und y, und die Vorgabe von $f(z)$ mit der von u und v, d. h., wir können u und v als Funktionen von x und y auffassen:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{3}$$

Bei den elementaren Funktionen kann man diese Zerlegung in Real- und Imaginärteil mit Hilfe einfacher Operationen ausführen, z. B.

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i\,2\,xy.$$

Sei $z_0 = x_0 + iy_0$; dann ist die Bedingung $z \to z_0$ gleichbedeutend mit $x \to x_0$ und $y \to y_0$.

Aus der Definition der Stetigkeit im Punkte z_0 folgt, daß für $z \to z_0$

$$f(z) \to f(z_0)$$

oder

$$u(x, y) + iv(x, y) \to u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$$

gelten muß, was gleichbedeutend mit

$$u(x, y) \to u(x_0, y_0)$$

und

$$v(x, y) \to v(x_0, y_0)$$

ist. Folglich ist die Stetigkeit von $f(z)$ im Punkte z_0 gleichbedeutend mit der Stetigkeit von $u(x, y)$ und $v(x, y)$ im Punkte (x_0, y_0).

Trennt man Real- und Imaginärteil und benutzt die Stetigkeit der elementaren Funktionen reeller Variabler, so überzeugt man sich davon, daß Polynome und die Funktionen e^z, $\sin z$, $\cos z$ in der ganzen komplexen Ebene stetig sind.

Eine rationale Funktion ist überall stetig bis auf die Punkte z, für die ihr Nenner verschwindet. Ebenso ist $\operatorname{tg} z$ überall stetig bis auf die Punkte z, in denen $\cos z$ Null wird. Wie im Reellen sind Summe und Produkt endlich vieler stetiger Funktionen wieder stetige Funktionen. Der Quotient zweier stetiger Funktionen ist bis auf die Werte z stetig, für die der Nenner Null wird.

Wir beschäftigen uns zunächst mit eindeutigen Funktionen, später behandeln wir auch mehrdeutige. Beispiele für letztere sind $\sqrt{z-1}$, die Funktion (2) und die Umkehrungen der Kreisfunktionen.

2. Ableitungen. Sei $f(z)$ im Punkte z und in allen Punkten, die genügend nahe bei z liegen, definiert. Als Ableitung $f'(z)$ im Punkte z definiert man den Grenzwert

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \tag{4}$$

Dabei muß dieser endlich und stets derselbe sein, wie auch der komplexe Zuwachs Δz gegen Null streben mag.

Man zeigt ebenso mühelos wie bei einer reellen Variablen, daß ein konstanter Faktor vor das Ableitungszeichen gezogen werden darf und daß die üblichen Differentiationsregeln für Summen, Produkte und Quotienten [**I, 47**] gelten. Außerdem beweist man leicht [**I, 47**], indem man den binomischen Satz anwendet, die übliche Regel für die Differentiation der Potenzfunktion für positive ganze Exponenten:

$$(z^n)' = n z^{n-1}. \tag{5}$$

Daher können wir behaupten, daß ein Polynom in jedem beliebigen Punkt z eine Ableitung besitzt. Ebenso haben die rationalen Funktionen überall eine Ableitung bis auf diejenigen Werte z, für die der Nenner Null wird.

Ferner gilt die übliche Regel für die Differentiation zusammengesetzter Funktionen:

$$\frac{d}{dz} F(w) = \frac{d}{dw} F(w) \frac{dw}{dz}, \tag{6}$$

wobei natürlich vorausgesetzt ist, daß die beiden auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Ableitungen existieren. Wie im Reellen folgt aus der Existenz der Ableitung in einem gewissen Punkt auch die Stetigkeit von $f(z)$ in diesem Punkt.

Die Funktion $f(z)$ sei in einem gewissen Bereich B definiert und besitze in jedem inneren Punkt von B eine Ableitung. Man sagt dann, $f(z)$ sei innerhalb des Gebietes B differenzierbar. Die Ableitung $f'(z)$ ist innerhalb B ebenfalls eine eindeutige Funktion.

Wir führen eine wichtige Definition ein: Eine Funktion $f(z)$ heißt *regulär* (oder *holomorph*) innerhalb B, wenn sie dort eindeutig ist und eine stetige Ableitung $f'(z)$ hat. Wir bemerken zunächst, daß aus der Existenz der Ableitung auch die Stetigkeit von $f(z)$ in B folgt. Zuweilen sagt man, $f(z)$ sei im Punkte z_0 regulär. Das bedeutet, daß $f(z)$ innerhalb eines gewissen Gebietes, das den Punkt z_0 im Innern enthält, regulär ist.

Wir greifen nun auf Formel (3) zurück, in welcher Real- und Imaginärteil sowohl bei z als auch bei der Funktion $f(z)$ getrennt sind, und stellen folgende Frage: Welche Bedingungen müssen die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ erfüllen, damit $f(z)$ innerhalb des Gebietes B regulär ist? Wir nehmen zunächst an, $f(z)$ sei innerhalb B regulär, und ziehen daraus Schlüsse auf $u(x, y)$ und $v(x, y)$.

Wie wir schon früher bei der Definition der Ableitung, deren Existenz wir voraussetzen, erwähnten, können wir den Zuwachs $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ auf beliebige Weise gegen Null streben lassen. Wir zeichnen in B einen gewissen Punkt M mit der Koordinate $z = x + iy$ und einen variablen Punkt N mit der Koordinate $z + \Delta z = (x + \Delta x) + i(y + \Delta y)$ aus, wobei N gegen M streben möge.

Dann betrachten wir speziell zwei Fälle, in denen wir N gegen M, d. h. Δz gegen Null streben lassen.

Zuerst möge N auf einer zur x-Achse parallelen Geraden gegen M gehen, d. h.

(7) $$\Delta y = 0 \quad \text{und} \quad \Delta z = \Delta x$$

gelten.

Dann möge N auf einer zur y-Achse parallelen Geraden gegen M streben; dabei gilt

(8) $$\Delta x = 0 \quad \text{und} \quad \Delta z = i\Delta y\,.$$

Nun bilden wir die Ableitung $f'(z)$. Allgemein gilt

(9) $$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y}\,.$$

Daher erhalten wir für den ersten Fall

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i\frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}\right].$$

Daraus ersieht man, daß Real- und Imaginärteil auf der rechten Seite der Gleichung Grenzwerte haben, d. h. die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ partielle Ableitungen nach x besitzen müssen, und daß die Beziehung

(10) $$f'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

gilt.

Entsprechend bekommen wir für den zweiten Fall gemäß (8) und (9) die Gleichungen

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{i}\left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + i\frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y}\right]$$

oder

(11) $$f'(z) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\,.$$

Vergleichen wir die Ausdrücke (10) und (11) für $f'(z)$, so erhalten wir die Bedingungen

(12) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \end{aligned}\right.$$

denen die partiellen Ableitungen von $u(x, y)$ und $v(x, y)$ genügen müssen.

Aus der Stetigkeit von $f'(z)$ folgt auf Grund von (10) und (11) die Stetigkeit der partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$. Die vorhergehenden Betrachtungen führen uns zu dem Ergebnis: Für die Regularität von $f(z)$ innerhalb B ist notwendig, daß folgende Bedingungen erfüllt sind: *$u(x, y)$ und $v(x, y)$ müssen innerhalb B stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach x und y haben, und diese Ableitungen müssen den Relationen* (12) *genügen.* Wir zeigen jetzt, daß *diese Bedingungen für die Regularität von $f(z)$ im Gebiet B nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind.* Wir nehmen also an, die hergeleiteten Bedingungen seien erfüllt, und beweisen die Existenz der stetigen Ableitung $f'(z)$. Berücksichtigt man die Stetigkeit der partiellen Ableitungen von $u(x, y)$ und $v(x, y)$ nach x und y, so kann man schreiben [**I, 68**]:

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y;$$
$$v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y,$$

wobei die ε_k zusammen mit Δx und Δy gegen Null streben. Bildet man mit Hilfe der letztgenannten Ausdrücke den Zuwachs $f(z + \Delta z) - f(z)$ der Funktion und setzt ihn in die Beziehung (4) ein, so bekommt man

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y\right) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Benutzt man die Bedingungen (12), dann kann man diese Relation in der Form

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \varepsilon_5 \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + \varepsilon_6 \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

schreiben, wobei

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_1 + i\varepsilon_3 \quad \text{und} \quad \varepsilon_6 = \varepsilon_2 + i\varepsilon_4$$

gleichzeitig mit Δz gegen Null streben.

Man sieht leicht, daß die letzten beiden Summanden rechts ebenfalls gegen Null gehen. Es gilt z. B.

$$\left|\varepsilon_5 \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}\right| = |\varepsilon_5| \frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.$$

Hier strebt der erste Faktor gegen Null, und der zweite ist nie größer als Eins.

Man kann daher die vorige Formel in der Form

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \varepsilon_7$$

schreiben, wobei ε_7 gleichzeitig mit Δz gegen Null strebt, während die ersten beiden Summanden der rechten Seite von Δz unabhängig sind.

Es strebt also der Ausdruck (4) gegen einen bestimmten Grenzwert, der durch (10) definiert ist. Daraus folgt, daß die obengenannten Bedingungen für $u(x,y)$ und $v(x, y)$ *notwendig und hinreichend* sind für die Regularität von $f(z)$ im Gebiet B. Die Gleichungen (12) werden gewöhnlich *Cauchy-Riemann sche Differentialgleichungen* genannt.

Wir sind diesen Gleichungen schon begegnet; sie müssen von Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion stationärer ebener Strömungen idealer inkompressibler Flüssigkeiten erfüllt werden [**II**, 74]. Wir sehen also, daß die Grundgleichungen der Funktionentheorie gleichzeitig auch diejenigen für die Untersuchung hydrodynamischer Probleme sind. So ergeben sich zahlreiche wichtige Anwendungen der Funktionentheorie auf die Hydrodynamik. Darüber werden wir im folgenden Kapitel sprechen.

Wir werden später folgende wichtige Tatsache beweisen: Ist eine reguläre Funktion vorgegeben, so besitzen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ Ableitungen beliebiger Ordnung. Differenziert man die erste der Gleichungen (12) partiell nach x, die zweite nach y und addiert, so bekommt man

$$(13_1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,.$$

Entsprechend folgert man aus (12) mühelos

$$(13_2)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\,.$$

Daraus folgt, daß *Real- und Imaginärteil einer regulären Funktion* $f(z)$ *die* LAPLACE*sche Gleichung erfüllen müssen*, d. h., sie müssen *harmonische Funktionen* sein. Im folgenden Kapitel untersuchen wir auch eingehend den Zusammenhang der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen mit der LAPLACEschen Gleichung.

Aus den Gleichungen (13) folgt: Wir können eine reguläre Funktion konstruieren, indem wir ihren Realteil willkürlich vorgeben, d. h. für $u(x, y)$ eine beliebige Lösung der Gleichung (13_1) nehmen; wir zeigen dann, daß dadurch $v(x, y)$ bis auf eine additive Konstante bestimmt ist.

In der Tat folgt aus den Gleichungen (12)

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\,,$$

also

$$(14)\qquad v(x, y)=\int\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)+C\,.$$

Es bleibt nachzuprüfen, daß das Kurvenintegral nicht vom Weg abhängt und eine Funktion seiner oberen Grenze liefert [**II, 71**]. Wir erinnern daran, daß man die Bedingung für die Unabhängigkeit eines Kurvenintegrals

$$\int (Xdx+Ydy)$$

vom Wege in folgender Weise schreiben kann:

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Wenden wir dies auf das Integral (14) an, so bekommen wir

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\quad\text{oder}\quad\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,;$$

diese Bedingung ist aber nach Voraussetzung erfüllt, da wir für $u(x, y)$ eine harmonische Funktion genommen hatten. Wir bemerken noch: Auch wenn $u(x, y)$