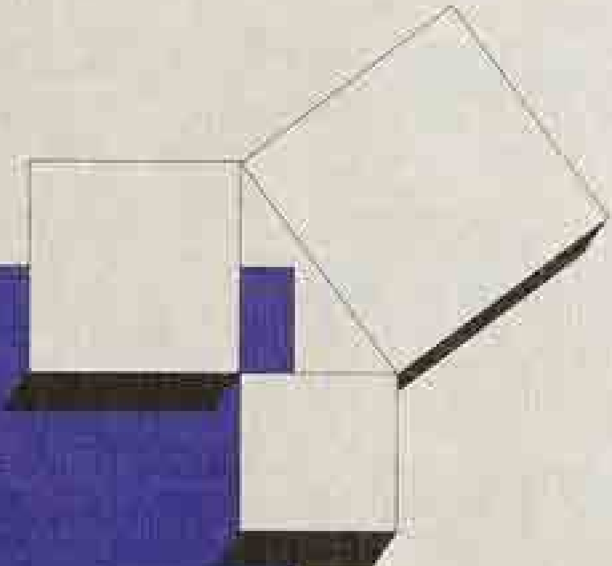
H. Stöcker (Hrsg.)

Analysis für Ingenieurstudenten

Band 2



Verlag Harri Deutsch

Horst Stöcker (Hrsg.)
Siegfried Fuchs
Jens Konopka
Manfred Schneider

Analysis für Ingenieurstudenten Band 2

Mit 177 Aufgaben und Lösungen
sowie 138 Abbildungen

Verlag Harri Deutsch
Thun und Frankfurt am Main

Professor Dr. Horst Stöcker (Hrsg.), Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Professor Dr. Siegfried Fuchs, Dresden
Dr. Jens Konopka, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Professor Dr. Manfred Schneider, Chemnitz

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Analysis für Ingenieurstudenten / Horst Stöcker (Hrsg.);
Siegfried Fuchs ... - Thun ; Frankfurt am Main : Deutsch.
NE: Stöcker, Horst [Hrsg.]; Fuchs, Siegfried
Bd. 2. Mit 177 Aufgaben und Lösungen. - 1996
ISBN 3-8171-1340-4

ISBN 3-8171-1340-4

Druck: Fuldaer Verlagsanstalt GmbH
Printed in Germany

Vorwort

Die Lehrbuchreihe mit **Analysis** (Band 1 und 2) sowie **Lineare Algebra** und **Optimierung, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik** ist aus unseren Kursvorlesungen „**Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure**" an Fachhochschulen und Universitäten entwickelt worden.
Der vorliegende zweite Band hilft den Studierenden der Anfangssemester in den Studiengängen der Naturwissenschaften und Technik zu lernen, die Differential- und Integralrechnung von Funktionen mit mehreren Variablen, Vektoralgebra und -analysis, Reihen und Differentialgleichungen sowie Laplace- und Fouriertransformationen intelligent zur Lösung eines breiten Spektrums von mathematischen und physikalisch-technischen Problemen einzusetzen.
Um die unterschiedliche Vorbildung der Studierenden für die Hochschulmathematik zu überbrücken, haben wir im ersten Band mit Funktionen einer Variablen, Differentialrechnung und Integralrechnung mit einer Variablen die wichtigsten Voraussetzungen der Schulmathematik knapp, aber komplett wiederholt. Die Leser sollten vor dem Einstieg in den Band **Analysis 2** zuerst anhand von **Testübungsaufgaben** aus dem Band **Analysis 1** ihre individuellen Vorkenntnisse beurteilen.

Die mathematischen **Sätze**, **Regeln** und **Definitionen** sind anschaulich erläutert und anhand von Beispielen verdeutlicht. Auf komplizierte **Beweise** wurde weitgehend verzichtet.

Hunderte von erprobten **Beispielen** und **Übungsaufgaben** mit **Lösungen** helfen dem Studierenden, das Erlernte zu üben und seine Fähigkeiten zu testen. Die Bewältigung des Übungsstoffes sollte wesentlicher Bestandteil der Arbeit des Studierenden mit diesem Werk sein.
Die ausführlichen Beispiele im Text sind so ausgewählt, daß der Studierende optimal vom Nachvollziehen des Lösungsweges profitiert.
Zahlreiche Übungsaufgaben verschiedener Schwierigkeitsgrade helfen dem Studierenden, Vertrauen in seine Problemlösungsfähigkeit zu gewinnen. Es wird trainiert, ohne fertiges Rezept auch komplexere Aufgaben zu meistern.
Lösungen zu den Übungsaufgaben stehen im Anhang des Buches (Teil VI) zur Verfügung.

Für alle Abbildungen wurden **Computergrafik-Programme** benutzt. Funktionen und Kurven wurden mit hochauflösender Grafik erstellt.

Computeralgebra- und **Numerik-Programmpakete** wie „MATHEMATICA", „MATHCAD", „MAPLE" und andere unterstützen die Anwendung der Hochschulmathematik in Naturwissenschaft und Technik in zunehmendem Maße.
Das **Verständnis** der diesen Computermethoden unterliegenden Mathematik ist wichtig. Auch für selbstentwickelte Programme zur Lösung von Problemen mit wachsender Komplexität, mit denen man sich sowohl als Student als auch in der beruflichen Praxis auseinandersetzen muß, sind Kenntnisse der Numerik unerläßlich. Diese Methoden sind am Ende der jeweiligen Teile vorgestellt.

Programme im PASCAL-Quelltext erleichtern den Lesern die praktische Arbeit auf dem Computer.
Diese Numerik-Abschnitte sind mit einem Stern (*) gekennzeichnet.

Folgende **Strukturierungselemente** wurden am linken Rand eingesetzt:

Sätze und Regeln,

Definitionen,

B Beispiele,

▷ wichtige Hinweise.

Funktionen, **Differential-** und **Integralrechnung** mit einer Variablen sind in dieser Reihe im Band **Analysis 1** behandelt.
Band 3 enthält die Kapitel **Lineare Algebra** und **Optimierung**, **Wahrscheinlichkeitsrechnung** und **Statistik**.
Als ausführliches, auf den Inhalt dieser Reihe abgestimmtes **Nachschlagewerk** empfehlen wir das „**Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren**" von H. Stöcker (Hrsg.), Verlag Harri Deutsch, sowie ergänzend dazu die CD-Rom „**Mathematik auf Disc**" mit zahlreichen zusätzlichen Beispielen und weiterführenden modernen Methoden.

Verlag Harri Deutsch und Autoren
Gräfstr. 47/51
60486 Frankfurt am Main
FAX: 069-7073739
E-mail: verlag@harri-deutsch.de
http://www.Germany.EU.net/shop/HD/verlag/

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Funktionen mehrerer unabhängiger Variablen, ihre Differentiation und Integration

1 Funktionen mehrerer unabhängiger Variablen

Ausgehend von den Darstellungen über Funktionen einer unabhängigen Variablen im 1. Band werden in diesem Abschnitt Grundbegriffe über Funktionen mehrerer, insbesondere zweier unabhängiger Variablen eingeführt.

1.1 Grundlagen

Im 1. Band wurden Funktionen einer unabhängigen Variablen betrachtet und damit eindeutige Zuordnungen von Elementen einer Menge X, den Elementen des Definitionsbereiches, zu Elementen einer Menge Y, den Elementen des Wertebereiches, untersucht. Gleichbedeutend damit ist, daß den Werten der unabhängigen Variablen x durch eine Vorschrift je ein Wert der abhängigen Variablen y zugeordnet wurde.
Zur Beschreibung von zahlreichen Zuständen und Prozessen, insbesondere im naturwissenschaftlichen und technischen Bereich, reichen diese mathematischen Hilfsmittel nicht aus; vielmehr treten oft mehrere unabhängige Variablen auf, denen durch eine Vorschrift eindeutig ein Funktionswert zugeordnet wird.

B Das Volumen V eines Kreiskegels ist eine Funktion seines Radius r und seiner Höhe h, ausgedrückt durch

$$V(r,h) = \frac{\pi h}{3} r^2$$

B Für einen Kegelstumpf mit r_1 als Radius der Grundfläche und r_2 als Radius der Deckfläche sowie der Höhe h ist das Volumen eine Funktion von drei unabhängigen Variablen. Sie lautet

$$V(r_1, r_2, h) = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

B Für einen elektrischen Stromkreis mit dem Widerstand R und der Stromstärke I wird die Spannung U nach dem Ohmschen Gesetz

$$U = R \cdot I$$

ausgedrückt. Damit kann eine der drei Größen berechnet werden, wenn die beiden anderen bekannt sind.
Bei einer Reihenschaltung von n ohmschen Widerständen $R_1, R_2, \ldots, R_n$ wird der Gesamtwiderstand durch

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

ausgedrückt. Im Falle variabler R_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ist R eine Funktion dieser n unabhängigen Variablen.

1.1.1 Funktionsbegriff

Im allgemeinen sind die Abhängigkeiten umfangreich und vielfältig. So ist z. B. die Fahrgeschwindigkeit eines Autos nicht nur von der Stellung des Gashebels und des eingelegten Ganges, sondern auch von der Straßenlage, den Windverhältnissen, der Motortemperatur, dem Kraftstoff, der Automasse und vielen weiteren mehr oder weniger einflußreichen festen Größen und Variablen abhängig.
Daraus ist ersichtlich, daß der eingangs wiederholte Funktionsbegriff zu erweitern ist. Dabei beschränken wir uns weitgehend auf zwei unabhängige Variablen, wodurch eine geometrische Veranschaulichung der Zusammenhänge möglich wird.

Eine **Funktion f von zwei unabhängigen Variablen** ist eine eindeutige Abbildung, bei der jedem geordneten Paar (x_1, x_2) des Definitionsbereiches $D(f)$ ein Funktionswert y des Wertebereiches $W(f)$ zugeordnet wird.
In Zeichen:

$$f = \{(x_1, x_2; y) | y = f(x_1, x_2)\}$$

Verallgemeinerung:
Eine Verallgemeinerung dieser Erklärung auf Funktionen mit n unabhängigen Variablen ist ohne zusätzliche Erläuterungen sofort möglich. Bei n unabhängigen Variablen gilt:

$$f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n; y) | y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}.$$

Im folgenden werden nur solche Funktionen betrachtet, deren Definitions- und Wertebereich Mengen reeller Zahlen sind, d. h. reelle Funktionen mit reellen Variablen.

Bezeichnungen:
In Anlehnung an die mit x, y, z bezeichneten Koordinatenachsen eines dreidimensionalen Raumes ist es zweckmäßig, bei Beschränkung auf Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen, diese mit x und y sowie die abhängige Variable mit z zu bezeichnen. Damit kann der funktionale Zusammenhang durch

$$z = f(x, y)$$

ausgedrückt werden.
Wir wollen an dieser oder einer ähnlichen Bezeichnungsweise, wie $z = u(x, y)$, im folgenden weitgehend festhalten.

In Analogie zur Bezeichnungsweise bei Funktionen einer unabhängigen Variablen werden hierbei x und y die **Argumente der Funktion** z genannt. Die Menge aller möglichen Paare (x, y), denen ein Funktionswert z zugeordnet ist, bilden den Definitionsbereich $D(f)$ der Funktion f. Mit $(x_0, y_0) \in D(f)$ bezeichnet $f(x_0, y_0)$ den speziellen Wert z_0, den die Funktion an der Stelle (x_0, y_0) annimmt. Deutet man (x_0, y_0) als Koordinaten des Punktes P' in der x, y-Ebene, so bedeutet dies, daß f durch $P(x_0, y_0, z_0)$, d. h. durch einen Punkt im dreidimensionalen Raum, $\mathbb{R}_3$ genannt, graphisch veranschaulicht wird (s. Abb. 1.1).

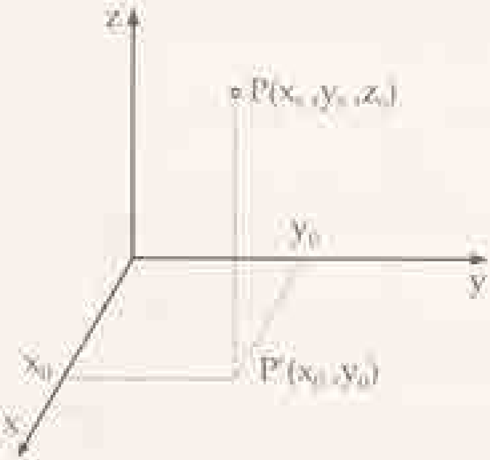


Abb. 1.1:
Veranschaulichung von $z_0 = f(x_0, y_0)$

Im eindimensionalen Fall ist der Definitionsbereich durch eine lineare Gleichung oder Ungleichung für die unabhängige Variable in Form eines endlichen oder unendlichen Intervalls, z. B. durch $a \le x \le b$, $a \le x < \infty$ oder $x = x_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, charakterisiert. Der Definitionsbereich für eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen kann durch eine zweidimensionale Erweiterung des Intervallbegriffs beschrieben werden. Dabei werden mehrere Fälle unterschieden.

Fallunterscheidungen im zweidimensionalen Fall:

(1) Einem abgeschlossenen Intervall entspricht geometrisch ein Bereich der x-y-Ebene mit Rand. I. allg. verwendet man einen Rechtecksbereich: $\{(x, y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$.

(2) Einem offenen Intervall entspricht ein Bereich der x-y-Ebene ohne Rand. Es wird Gebiet genannt. Ein Rechtecksgebiet wird durch $\{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$ beschrieben.

(3) Anstelle einer Punktmenge auf einer Zahlengeraden als Definitionsbereich einer Funktion einer unabhängigen Variablen, einer diskreten Variablen, tritt eine Menge von sogenannten Gitterpunkten in der Zahlenebene als Definitionsbereich einer Funktion zweier unabhängiger Variablen.

Im folgenden werden einige typische Definitionsbereiche für eine Funktion $z = f(x, y)$ als Beispiele angeführt.

B Durch

$$x \geq 0, y \geq 0$$

ist der 1. Quadrant einschließlich Abszissen- und Ordinatenachsen als Definitionsbereich charakterisiert. Ihm gehören alle geordneten Wertepaare (x, y) mit nicht negativen $x, y \in \mathbb{R}$ an (s. Abb. 1.2).

B Die Ungleichungen

$$a_1 \leq x \leq a_2$$
$$b_1 \leq y \leq b_2$$

bestimmen als Definitionsbereich ein Rechteck mit den Ecken (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_2) einschließlich der Berandung (s. Abb. 1.3).

Abb. 1.2: $x \geq 0, \quad y \geq 0$

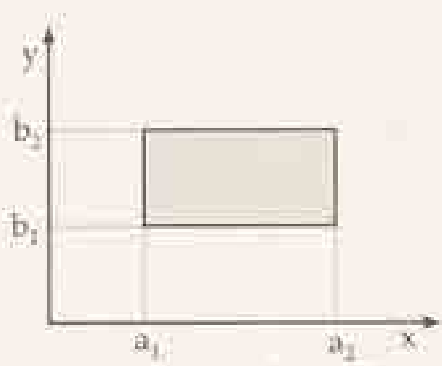


Abb. 1.3: $a_1 \leq x \leq a_2; b_1 \leq y \leq b_2$

B Die nicht lineare Ungleichung

$$x^2 + y^2 < 1$$

stellt die Kreisfläche des Mittelpunktkreises mit dem Radius 1 ohne Kreisrand als Definitionsbereich dar (s. Abb. 1.4).

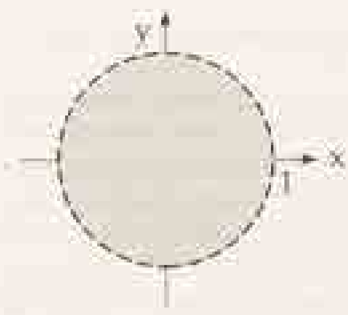


Abb. 1.4: $x^2 + y^2 < 1$

B Die Menge von Wertepaaren

$$\{a_{n,m}\} = \{x_n = n, y_m = m \mid n = 1, 2, \ldots, 5;\ m = 1, 2, 3\},$$

kann durch Gitterpunkte im I. Quadranten veranschaulicht werden (s. Abb. 1.5) und Definitionsbereich einer Funktion $z = f(x_n, y_m)$ sein.

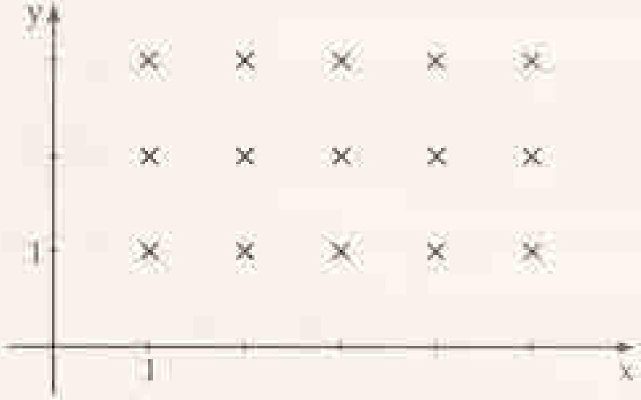


Abb. 1.5: Punkte $\{x_n = n, y_m = m\}$, $n = 1, 2, \ldots, 5$; $m = 1, 2, 3$

1.1.2 Einteilung und Darstellungsarten

Die **Einteilung** von Funktionen mehrerer unabhängiger Variablen kann durch eine Charakterisierung der Abhängigkeit von den einzelnen unabhängigen Variablen erfolgen. So ist die Funktion

$$f(r, h) = \frac{h\pi}{3} r^2$$

bezüglich h eine lineare und bezüglich r eine quadratische Funktion.

Die **gebräuchlichste Darstellungsart** ist die **analytische Darstellung**. Analog wie bei Funktionen einer unabhängigen Variablen kann diese Darstellungsart in expliziter, impliziter oder in Parameterform erfolgen.

Weitere Darstellungsarten, die sich besonders für Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen eignen, sind:

(1) Die **tabellarische Darstellung** in Form einer Funktions- oder Wertetabelle. Sie findet vor allem Anwendung, wenn der Definitionsbereich der Funktion aus einer endlichen Anzahl von Wertepaaren besteht oder wenn Funktionswerte für ausgewählte Wertepaare des Definitionsbereiches von Interesse sind.

(2) Die **geometrische Darstellung** in Form einer Fläche im Raum, die entsteht, wenn jedem Wert des Definitionsbereiches genau ein Funktionswert zugeordnet und damit bei einer Funktion von zwei unabhängigen Variablen jedem geordneten Tripel (x, y, z) eindeutig ein Punkt im $\mathbb{R}_3$ zugeordnet wird. Ihr Vorteil ist die Anschaulichkeit, ihr Nachteil die erschwerte graphische Darstellbarkeit.

(3) Die **graphische Darstellung** in Form von ebenen Kurven unter Verwendung von Schnittebenen und die Projektion der Schnittkurven in die Koordinatenebenen. Bei dieser praktischen Darstellungsweise geht einerseits die räumliche Vorstellung zugunsten von ebenen Widerspiegelungen bestimmter Eigenschaften der räumlichen Flächen, die mathematischen Betrachtungen leichter zugänglich wird, verloren. Andererseits ist es möglich, aus den ebenen Darstellungen der in die Koordinatenebenen projezierten Schnittkurven ein räumliches Bild der Funktionsfläche zu entwickeln. Aus diesem Grunde bilden geometrische und graphische Darstellung meist eine Einheit.

(4) Die **nomographische Darstellung** in Form von Leiter- oder Netztafeln unter Verwendung geeigneter Funktionsskalen. Bei dieser rationellen Darstellungweise wird ebenfalls auf Anschaulichkeit verzichtet, die Genauigkeit sowie der Ausbau des Rechenblattes den praktischen Bedürfnissen angepaßt und dafür ein leichtes Ablesen der Zusammenhänge zwischen den einzelnen Variablen ermöglicht.

Auf diese Darstellungsarten sowie ihrer Handhabung wird im weiteren ausführlicher eingegangen.

1.2 Analytische und tabellarische Darstellung

1.2.1 Analytische Darstellung

Bei Beschränkung auf Funktionen zweier unabhängiger Variabler können die folgenden analytischen Darstellungsformen angeführt werden:

(1) Die **explizite Form**

$z = f(x, y)$,

(2) die **implizite Form**

$F(x, y, z) = 0$,

(3) die **Parameterform**

$$x = x(u, v)$$
$$y = y(u, v)$$
$$z = z(u, v),$$

wobei u und v die beiden Parameter bedeuten. Diese Darstellungsform wird vor allem bei der Darstellung von Flächen in der Differentialgeometrie bevorzugt benutzt.

Dabei ist zu beachten, daß nicht jeder Ausdruck in der aufgeführten Form eine Funktion darstellt. Mitunter sind zusätzliche Festlegungen erforderlich, um die Eindeutigkeit der Darstellung zu sichern.
Es ist auch nicht in jedem Falle möglich, von der impliziten in die explizite Form überzugehen.

B Für den Ausdruck

$$z = f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

sind größtmöglicher Definitionsbereich zu ermitteln und zugehöriger Wertebereich so zu bestimmen, daß $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ eine Funktion ist.

Lösung: Für den Definitionsbereich gilt

$$25 - x^2 - y^2 \geq 0.$$

Damit ist z reellwertig. Aus

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

erkennt man, daß $D(f)$ aus allen Wertepaaren besteht, die entweder der Kreisfläche oder dem Rand eines Mittelpunktkreises mit dem Radius 5 angehören.
Mit

$$x^2 + y^2 \geq 0$$

und bei Beschränkung auf $z \geq 0$ gilt $0 \leq z \leq 5$ als Wertebereich.
Nach Umformung erhält man

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

Bei Beschränkung auf $z \geq 0$ ist dies die Gleichung einer Halbkugelfläche mit $r = 5$ und dem Koordinatenursprung als Kugelmittelpunkt.

Die **Gleichheit von Funktionen** kann bei unterschiedlicher Darstellungsform geprüft werden, indem man Definitions- und Wertebereiche miteinander vergleicht.

Sind zwei Funktionen in verschiedenen Darstellungsformen gegeben, so sind sie einander gleich, falls ihre Definitionsbereiche übereinstimmen und ihre Funktionswerte in allen Punkten des gemeinsamen Definitionsbereiches gleich sind.

B Es ist nachzuweisen, daß die beiden Funktionen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0 \quad , \quad z \geq 0 \quad \text{und}$$
$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \quad , \quad z \geq 0$$

gleich sind.

Lösung: Aus $z \geq 0$ folgt im ersten Falle

$$z^2 = 25 - x^2 - y^2 \geq 0$$

und im zweiten Falle dieselbe Ungleichung, da der Radikand nicht negativ sein darf. Somit besitzen beide Funktionen den gleichen Definitionsbereich.
Nach Quadrieren der 2. Gleichung und Einsetzen in die 1. Gleichung erhält man die Identität

$$x^2 + y^2 + (25 - x^2 - y^2) - 25 \equiv 0,$$

womit der Nachweis für die Gleichheit der beiden Funktionen erbracht ist.

Ergänzung:

Für die im Beispiel betrachtete Funktion lautet eine Parameterform

$$\begin{aligned} x &= 5 \sin u \cdot \cos v \\ y &= 5 \sin u \cdot \sin v \qquad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq v \leq 2\pi \\ z &= 5 \cos u. \end{aligned}$$

Gibt man dies in die implizite Form ein, so erhält man

$$\begin{aligned} &25(\sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u) - 25 \\ &= \sin^2 u(\sin^2 v + \cos^2 v) + (1 - \sin^2 u) - 1 \equiv 0, \end{aligned}$$

womit die Übereinstimmung der Funktionswerte für den gesamten Definitionsbereich nachgewiesen ist.

Die analytische Darstellung von Funktionen ist eng mit ihrer Veranschaulichung, der geometrischen Darstellung, verknüpft, die im nächsten Abschnitt weiter ausgebaut wird.

1.2.2 Tabellarische Darstellung

Eine **Funktions- oder Wertetabelle** für eine Funktion zweier unabhängiger Variablen erhält man, indem für die unabhängigen Variablen Werte aus dem Definitionsbereich eingesetzt und die zugehörigen Funktionswerte ermittelt werden.

Die Ergebnisse können in tabellarischer Form übersichtlich angeordnet werden. Dazu werden in der ersten Zeile und in der ersten Spalte Werte für die unabhängigen Variablen notiert und in der jeweiligen Schnittstelle von Zeile und Spalte der zugehörige Funktionswert eingetragen (s. Tab. 1.1). Dabei bedeutet $z_{ik} = f(x_i, y_k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Tabelle 1.1. Funktiostabelle für $z = f(x, y)$

$x \backslash y$	y_1	y_2	$\cdots\cdots$	y_m
x_1	z_{11}	z_{12}	$\cdots\cdots$	z_{1m}
x_2	z_{21}	z_{22}	$\cdots\cdots$	z_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	z_{n1}	z_{n2}	$\cdots\cdots$	z_{nm}

Anmerkung: Die Anordnung der z_{ik} in einem derartigen Schema von n Zeilen und m Spalten nennt man eine **Matrix**, insbesondere eine (n, m)-Matrix.

Während aus einer Wertetabelle für eine Funktion einer unabhängigen Variablen meist unmittelbar auf die Gestalt des Graphen der Funktion geschlossen werden kann, ist dies das Bild einer Funktion zweier unabhängiger Variablen als Fläche im $\mathbb{R}^3$, und die Anschauung ist nur durch weitere Betrachtungen möglich. Dies soll am folgenden Beispiel erläutert werden.

[B] Durch welche Fläche im Raum kann die Funktion

$$z = 5 - \frac{5}{4}x - \frac{5}{3}y \quad \text{mit} \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$$

veranschaulicht werden?

Lösung: Beim Aufstellen einer Funktionstabelle werden zunächst positiv ganzzahlige Werte für x und y zugrunde gelegt. Man erhält folgende Tabelle:

$x \backslash y$	0	1	2	3	4
0	5	$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	–
1	$\frac{15}{4}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{5}{12}$	–	–
2	$\frac{10}{4}$	$\frac{10}{12}$	–	–	–
3	$\frac{5}{4}$	–	–	–	–
4	0	–	–	–	–
5	–	–	–	–	–

In den durch einen Strich gekennzeichneten Feldern ist z nicht erklärt, da für die zugehörigen Wertepaare die Voraussetzung $z \geq 0$ verletzt ist.
Es ist ersichtlich, daß man sich auf Werte $x \in [0, 4]$ und $y \in [0, 3]$ beschränken muß.

Die Funktionstabelle wird übersichtlicher, wenn man alle interessierenden Funktionswerte einheitlich darstellt, in diesem Falle durch Brüche mit dem Nenner 12.

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	$\frac{60}{12}$	$\frac{40}{12}$	$\frac{20}{12}$	0
1	$\frac{45}{12}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{5}{12}$	–
2	$\frac{30}{12}$	$\frac{10}{12}$	–	–
3	$\frac{15}{12}$	–	–	–
4	0	–	–	–

Man erkennt, daß z eine lineare Funktion von y ist, wenn man für x konstante Werte einsetzt. Dem entsprechen Kurven $z = f(y)$ in Ebenen $x = const.$

Für $x = 0, 1, 2, 3, 4$ erhält man der Reihe nach

$$z = 5 - \frac{5}{3}y$$
$$z = \frac{15}{4} - \frac{5}{3}y$$
$$z = \frac{10}{4} - \frac{5}{3}y$$
$$z = \frac{5}{4} - \frac{5}{3}y$$
$$z = -\frac{5}{3}y.$$

Die Graphen dieser Funktion sind unter Berücksichtigung von $y \geq 0$ und $z \geq 0$ in der folgenden y, z-Ebene dargestellt; an den Geraden ist der zugehörige konstante x-Wert vermerkt (s. Abb. 1.6).
Aus dieser etwas aufwendigen geometrischen Interpretation ist erkennbar, daß das Bild der Ausgangsfunktion ein räumliches Dreieck mit den Eckpunkten $A(4; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 5)$ ist (s. Abb. 1.7). Etwas leichter erkennt man die Zusammenhänge, wenn man die Funktionsgleichung in der Form

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1$$

schreibt, da dadurch für konstante x-Werte Achsenabschnittsgleichungen von Geraden entstehen.

▷ Die damit verbundene Methode wird im folgenden Abschnitt 1.3 vorgestellt. Sie besteht in der bereits eingangs erwähnten Projektion von Schnittkurven in Koordinatenebenen. Im betrachteten Beispiel waren es die Schnittkurven der Funktionsfläche mit den Ebenen $x =$ const und ihre Projektion in die y, z-Ebene. Insbesondere ist der Punkt $P(y = 0, z = 0)$ in Abb. 1.6 die Projektion der Schnittkurve der Ebene $x = 5$ mit der Funktionsfläche in die y, z-Ebene, die durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft. In entsprechender Weise hätten auch Betrachtungen mit den Ebenen $y =$ const und $z =$ const angestellt werden können.

1.3 Geometrische Darstellung

Bereits an früherer Stelle wurde ausgeführt, daß durch $z = f(x, y)$ jedem geordneten Wertepaar (x, y) eindeutig ein Wert z zugeordnet wird und damit jedes geordnete Wertetripel (x, y, z) durch einen Bildpunkt $P(x, y, z)$ veranschaulicht werden kann. Die Gesamtheit aller Bildpunkte bezeichnet man als **Bild der Funktion** oder als Funktionsfläche. Es ist eine Fläche im Raum[1], deren Projektion in die x, y-Ebene mit dem Definitionsbereich der Funktion übereinstimmt (s. Abb. 1.8). Die *Darstellung einer Fläche im Raum* ist eng mit dem *zugrundegelegten Koordinatensystem* verbunden, von denen

[1] Falls nicht anders vereinbart, wird im weiteren unter „Raum" stets der dreidimensionale Raum verstanden, der auch mit $\mathbb{R}_3$ bezeichnet wird.