

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Determinanten</b>	<b>1</b>
1.1	<b>Einführendes Beispiel</b> . . . . .	1
1.2	<b>Determinanten zweiter Ordnung</b> . . . . .	2
1.2.1	Definition . . . . .	2
1.2.2	Eigenschaften . . . . .	2
1.3	<b>Determinanten dritter Ordnung</b> . . . . .	4
1.3.1	Definition und Wertberechnung . . . . .	4
1.4	<b>Determinanten <math>n</math>-ter Ordnung</b> . . . . .	5
1.4.1	Definition und Entwicklungssatz . . . . .	5
1.4.2	Vorteilhafte Berechnung des Wertes einer Determinante . . . . .	6
1.4.3	Weitere Anwendungen . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Matrizen</b>	<b>11</b>
2.1	<b>Einführendes Beispiel</b> . . . . .	11
2.2	<b>Grundbegriffe</b> . . . . .	12
2.2.1	Definition und Gleichheit von Matrizen . . . . .	12
2.2.2	Spezielle Matrizen . . . . .	12
2.2.3	Rang einer Matrix . . . . .	15
2.3	<b>Rechenoperationen für Matrizen</b> . . . . .	17
2.3.1	Addition und Subtraktion von Matrizen . . . . .	17
2.3.2	Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl . . . . .	17
2.3.3	Multiplikation einer Matrix mit einer Matrix . . . . .	18
2.3.4	Umkehroperation zur Matrizenmultiplikation . . . . .	21
2.4	<b>Eigenwertaufgabe</b> . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>25</b>
3.1	<b>Definitionen und Lösungsmethode</b> . . . . .	26
3.2	<b>Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme</b> . . . . .	28

ii *INHALTSVERZEICHNIS*

---

3.2.1	Spezialfälle . . . . .	28
3.2.2	Allgemeiner Fall . . . . .	29
3.2.3	Fallunterscheidungen für lösbare lineare Gleichungssysteme . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Aufgaben zum Teil I</b>	<b>39</b>
<b>II</b>	<b>Grundlagen der Graphentheorie und Netzplanmodelle</b>	<b>46</b>
<b>5</b>	<b>Graphen</b>	<b>46</b>
5.1	<b>Grundlagen</b> . . . . .	46
5.1.1	Gegenstand . . . . .	46
5.1.2	Einführendes Beispiel . . . . .	47
5.1.3	Spezielle Graphen und Begriffe . . . . .	47
5.1.4	Gerichtete und ungerichtete Graphen . . . . .	49
5.1.5	Spezielle Strukturen von Graphen . . . . .	49
5.1.6	Kanten und Bögen . . . . .	50
5.1.7	Arten des Zusammenhanges von Graphen . . . . .	54
5.1.8	Bäume und Gerüste . . . . .	55
5.1.9	Ströme und Spannungen . . . . .	57
5.2	<b>Darstellung von Graphen</b> . . . . .	60
5.2.1	Darstellung durch eine Adjazenzmatrix . . . . .	60
5.2.2	Darstellung durch eine Inzidenzmatrix . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Netzplanmodelle</b>	<b>66</b>
6.1	<b>Aufstellen von Netzplänen</b> . . . . .	66
6.1.1	Grundbegriffe . . . . .	66
6.1.2	Ereignis- und Aktivitätennetzpläne . . . . .	67
6.1.3	Phasen der Netzplantechnik . . . . .	70
6.2	<b>Methode CPM</b> . . . . .	71
6.2.1	Zeitplanung . . . . .	72
6.2.2	Beispiel zur Berechnung des kritischen Weges . . . . .	77
6.3	<b>Methode PERT</b> . . . . .	79
6.3.1	Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen . . . . .	79
6.3.2	Zeitplanung . . . . .	82

6.3.3	Interpretation der Ergebnisse . . . . .	85
6.3.4	Berechnung eines Netzplanes . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Aufgaben zum Teil II</b>	<b>91</b>
 <b>III Einführung in die Linearoptimierung</b>		 <b>94</b>
<b>8</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>94</b>
<b>8.1</b>	<b>Grundbegriffe und Aufgabenstellung</b> . . . . .	94
<b>8.2</b>	<b>Mathematische Modellformulierung</b> . . . . .	95
<b>9</b>	<b>Graphische Lösung linearer Optimierungsaufgaben</b>	<b>99</b>
<b>9.1</b>	<b>Graphische Lösung linearer Ungleichungssysteme</b> . . . . .	99
9.1.1	Ungleichungen mit zwei Variablen . . . . .	99
9.1.2	Spezielle Ungleichungen und ihre Lösungsmengen . . . . .	100
9.1.3	Beispiele . . . . .	100
9.1.4	Schlußfolgerungen und Ausblick . . . . .	104
<b>9.2</b>	<b>Graphische Lösung von Maximierungsaufgaben</b> . . . . .	105
9.2.1	Optimale Lösung für Standardbeispiel . . . . .	105
9.2.2	Mehrere optimale Lösungen . . . . .	107
9.2.3	Zusammenfassung . . . . .	108
<b>10</b>	<b>Analytische Lösung linearer Optimierungsaufgaben</b>	<b>110</b>
<b>10.1</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b> . . . . .	110
10.1.1	Normalform eines linearen Optimierungsproblems . . . . .	110
10.1.2	Einführung grundlegender Begriffe . . . . .	111
10.1.3	Standardbeispiel . . . . .	112
10.1.4	Simplextheorem und Simplexkriterium . . . . .	116
<b>10.2</b>	<b>Simplexmethode für den Normalfall der Maximierung</b> . . . . .	117
10.2.1	Grundlegende Aspekte . . . . .	117
10.2.2	Numerische Lösung des Standardbeispiels . . . . .	118
10.2.3	Simplexalgorithmus . . . . .	122
10.2.4	Rechteckschema zum Standardbeispiel . . . . .	126
<b>11</b>	<b>Transportoptimierung</b>	<b>129</b>

<b>11.1</b>	<b>Grundlagen</b>	129
11.1.1	Einführendes Beispiel	129
11.1.2	Formulierung des klassischen Transportproblems	131
11.1.3	Sätze zur Lösung von Aufgaben der Transportoptimierung	132
<b>11.2</b>	<b>Gewinnung einer Anfangslösung</b>	132
11.2.1	Aufsteigende Indexmethode	133
11.2.2	Beispiel	134
<b>11.3</b>	<b>Gewinnung einer optimalen Lösung</b>	136
11.3.1	Optimierungskriterium für das Transportproblem	136
11.3.2	Verbesserung einer nichtoptimalen zulässigen Basislösung	138
<b>12</b>	<b>Aufgaben zum Teil III: Einführung in die Linearoptimierung</b>	<b>141</b>
<b>IV</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>143</b>
<b>13</b>	<b>Zufällige Ereignisse</b>	<b>143</b>
<b>13.1</b>	<b>Grundlagen</b>	143
13.1.1	Begriffserklärungen	143
13.1.2	Ereignisrelationen und Ereignisoperationen	144
13.1.3	Strukturdarstellung von Ereignissen	148
13.1.4	Ereignisfeld	149
<b>14</b>	<b>Wahrscheinlichkeit von Ereignissen</b>	<b>151</b>
<b>14.1</b>	<b>Definition und Eigenschaften</b>	151
14.1.1	Relative Häufigkeit eines Ereignisses	151
14.1.2	Axiomatische Definition	152
<b>14.2</b>	<b>Berechnungsmethoden</b>	152
14.2.1	Klassische Methode	153
14.2.2	Geometrische Methode	153
14.2.3	Statistische Methode	154
<b>14.3</b>	<b>Bedingte Wahrscheinlichkeit</b>	155
<b>14.4</b>	<b>Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten</b>	157
14.4.1	Wahrscheinlichkeit eines Produktes von Ereignissen	157
14.4.2	Wahrscheinlichkeit einer Summe von Ereignissen	158
14.4.3	Totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und Formel von Bayes	159

<b>15</b>	<b>Zufallsgrößen und ihre Verteilungen</b>	<b>162</b>
15.1	Begriffsbildungen . . . . .	162
15.1.1	Zufallsgrößen . . . . .	162
15.1.2	Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	162
15.2	Diskrete Zufallsgrößen . . . . .	163
15.2.1	Einzelwahrscheinlichkeiten und Verteilungsfunktion . . . . .	163
15.2.2	Kennwerte . . . . .	168
15.3	Spezielle Verteilungen diskreter Zufallsgrößen . . . . .	170
15.3.1	Zweipunktverteilung . . . . .	171
15.3.2	Gleichmäßige diskrete Verteilung . . . . .	172
15.3.3	Binomialverteilung . . . . .	173
15.3.4	Poisson-Verteilung . . . . .	179
15.4	Stetige Zufallsgrößen . . . . .	184
15.4.1	Dichtefunktion und Verteilungsfunktion . . . . .	184
15.4.2	Kennwerte . . . . .	187
15.5	Spezielle Verteilungen stetiger Zufallsgrößen . . . . .	189
15.5.1	Gleichmäßige stetige Verteilung . . . . .	189
15.5.2	Exponentialverteilung . . . . .	191
15.5.3	Normalverteilung . . . . .	192
15.5.4	Standardisierte Normalverteilung . . . . .	195
15.5.5	Weibull-Verteilung . . . . .	203
15.6	Funktionen von Zufallsgrößen . . . . .	206
<b>16</b>	<b>Gesetze der großen Zahlen und Grenzwertsätze</b>	<b>208</b>
16.1	Einführung . . . . .	208
16.2	Gesetze der großen Zahlen . . . . .	209
16.3	Grenzwertsätze . . . . .	211
16.3.1	Einführung . . . . .	211
16.3.2	Grenzwertsatz von Moivre-Laplace . . . . .	211
16.3.3	Grenzwertsatz von Lindeberg-Levy . . . . .	214
16.3.4	Grenzwertsatz von Ljapunov . . . . .	216
<b>17</b>	<b>Zweidimensionale Zufallsgrößen</b>	<b>217</b>
17.1	Verteilung einer zweidimensionalen Zufallsgröße . . . . .	217
17.2	Zweidimensionale diskrete und stetige Zufallsgrößen . . . . .	220

17.2.1	Verteilung diskreter Zufallsgrößen . . . . .	220
17.2.2	Verteilung stetiger Zufallsgrößen . . . . .	222
17.2.3	Unabhängigkeit von Zufallsgrößen . . . . .	226
17.2.4	Kennwerte von Zufallsgrößen . . . . .	227
<b>17.3</b>	<b>Zweidimensionale Normalverteilung . . . . .</b>	<b>231</b>
17.3.1	Definition . . . . .	231
17.3.2	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mittels standardisierter Normalverteilung . . . . .	232
17.3.3	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mittels Streuungsnetz . . . . .	234
<b>18</b>	<b>Aufgaben zum Teil IV: Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>236</b>
<b>V</b>	<b>Grundlagen der mathematischen Statistik</b>	<b>245</b>
<b>19</b>	<b>Grundbegriffe</b>	<b>245</b>
19.1	Merkmale und Merkmalsausprägungen . . . . .	245
19.2	Daten und ihre Klassifikation . . . . .	247
19.3	Grundgesamtheit und Stichprobe . . . . .	248
19.4	Anforderungen an eine Stichprobe . . . . .	248
19.5	Arbeitsstufen einer statistischen Untersuchung . . . . .	249
<b>20</b>	<b>Beschreibende Statistik bei einem Merkmal</b>	<b>251</b>
20.1	Häufigkeitsverteilung . . . . .	251
20.2	Klassenbildung . . . . .	253
20.3	Summenverteilung . . . . .	255
20.4	Statistische Maßzahlen . . . . .	257
20.4.1	Mittelwerte . . . . .	257
20.4.2	Streuungsmaße . . . . .	262
<b>21</b>	<b>Beschreibende Statistik bei zwei Merkmalen</b>	<b>266</b>
21.1	Häufigkeitsverteilung . . . . .	266
21.2	Empirische Randverteilung . . . . .	267
21.3	Stochastischer Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen . . . . .	270
21.3.1	Begriffsbildung . . . . .	270
21.3.2	Arten des stochastischen Zusammenhangs . . . . .	272

21.3.3	Empirische Kovarianz . . . . .	272
<b>22</b>	<b>Regression und Korrelation</b>	<b>275</b>
<b>22.1</b>	<b>Gegenstand der Regressions- und Korrelationsanalyse . . . . .</b>	<b>275</b>
<b>22.2</b>	<b>Empirische Regressionsfunktion . . . . .</b>	<b>275</b>
22.2.1	Allgemeines . . . . .	275
22.2.2	Lineare Regressionsfunktion . . . . .	277
22.2.3	Nichtlineare Regressionsfunktionen . . . . .	282
<b>22.3</b>	<b>Empirisches Bestimmtheitsmaß . . . . .</b>	<b>289</b>
22.3.1	Empirisches Bestimmtheitsmaß . . . . .	289
22.3.2	Empirischer Korrelationskoeffizient . . . . .	292
<b>23</b>	<b>Zeitreihen</b>	<b>294</b>
<b>23.1</b>	<b>Begriffsbildung . . . . .</b>	<b>294</b>
<b>23.2</b>	<b>Absoluter und relativer Verlauf einer Zeitreihe . . . . .</b>	<b>295</b>
<b>23.3</b>	<b>Trend einer Zeitreihe . . . . .</b>	<b>296</b>
<b>23.4</b>	<b>Berechnung der Trendfunktion . . . . .</b>	<b>297</b>
<b>24</b>	<b>Stichprobenfunktionen und ihre Verteilungen</b>	<b>302</b>
<b>24.1</b>	<b>Mathematische Stichprobe und Stichprobenfunktionen . . . . .</b>	<b>302</b>
24.1.1	Stichproben . . . . .	302
24.1.2	Stichprobenfunktion . . . . .	302
<b>24.2</b>	<b>Quantile stetiger Zufallsgrößen . . . . .</b>	<b>303</b>
<b>24.3</b>	<b>Verteilungen von Stichprobenfunktionen . . . . .</b>	<b>305</b>
24.3.1	$\chi^2$ -Verteilung . . . . .	305
24.3.2	$t$ -Verteilung . . . . .	308
24.3.3	$F$ -Verteilung . . . . .	311
<b>25</b>	<b>Statistische Schätzmethoden</b>	<b>318</b>
<b>25.1</b>	<b>Punktschätzung . . . . .</b>	<b>318</b>
25.1.1	Aufgabenstellung und Grundbegriffe . . . . .	318
25.1.2	Gütekriterien für die Schätzfunktion . . . . .	319
<b>25.2</b>	<b>Konfidenzschätzung . . . . .</b>	<b>322</b>
25.2.1	Aufgabenstellung und Grundbegriffe . . . . .	322
25.2.2	Konfidenzintervall für $m$ eines normalverteilten Merkmals . . . . .	323

25.2.3	Konfidenzintervall für $\sigma^2$ eines normalverteilten Merkmals . . . . .	327
25.2.4	Konfidenzintervall für den Parameter $p$ eines 0-1-verteilten Merkmals	329
25.2.5	Konfidenzintervall für $\rho_{xy}$ bei normalverteiltem Merkmalspaar . . . . .	330
<b>26</b>	<b>Statistische Prüfverfahren</b>	<b>333</b>
26.1	<b>Aufgabenstellung und Grundbegriffe</b> . . . . .	333
26.2	<b>Prüfen von Erwartungswerten</b> . . . . .	335
26.2.1	Prüfen des Erwartungswertes eines normalverteilten Merkmals . . . . .	335
26.2.2	Gleichheit der Erwartungswerte zweier normalverteilter Merkmale . . . . .	339
26.3	<b>Prüfen von Dispersionen</b> . . . . .	340
26.3.1	Prüfen der Dispersion eines normalverteilten Merkmals . . . . .	340
26.3.2	Prüfen der Gleichheit der Dispersion zweier normalverteilter Merkmale	341
26.4	<b>Prüfen von Wahrscheinlichkeiten</b> . . . . .	343
26.4.1	Prüfen der Wahrscheinlichkeit eines 0-1-verteilten Merkmals . . . . .	343
26.4.2	Gleichheit der Wahrscheinlichkeiten zweier 0-1-verteilter Merkmale	344
26.5	<b>Prüfen von Verteilungen</b> . . . . .	345
26.5.1	Prüfen der Verteilung eines Merkmals . . . . .	345
26.5.2	Prüfen der Unabhängigkeit zweier Merkmale . . . . .	349
26.5.3	Prüfen der Gleichheit der Verteilungen mehrerer Merkmale . . . . .	351
26.6	<b>Prüfen des Korrelationskoeffizienten</b> . . . . .	353
26.6.1	Prüfen des Korrelationskoeffizienten gegen Null . . . . .	353
26.6.2	Prüfen des Korrelationskoeffizienten gegen $\rho_0 \neq 0$ . . . . .	353
<b>27</b>	<b>Aufgaben zum Teil V: Grundlagen der mathematischen Statistik</b>	<b>356</b>
<b>VI</b>	<b>Lösungen zu den Aufgaben</b>	<b>360</b>
28	Lösungen zum Teil I	360
29	Lösungen zum Teil II	364
30	Lösungen zum Teil III	368
31	Lösungen zum Teil IV	371
32	Lösungen zum Teil V	377

# Teil I

## Lineare Algebra

Gegenstand der linearen Algebra sind Gesamtheiten von Elementen, in denen algebraische Operationen definiert sind. Dazu gehören Determinanten und Matrizen sowie lineare Gleichungssysteme, die Gegenstand unserer Betrachtungen sind. Sie bilden die Grundlage für die Linearoptimierung, deren Elemente ebenfalls behandelt werden.

### 1 Determinanten

#### 1.1 Einführendes Beispiel

Für ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

kann mit dem Additionsverfahren eine Lösung ermittelt werden. Im einzelnen erhält man

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \\ \hline a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 & = & b_1a_{22} \\ -a_{21}a_{12}x_1 - a_{22}a_{12}x_2 & = & -b_2a_{12} \\ \hline (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 & = & a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot a_{22} \\ \cdot (-a_{12}) \\ + \end{array} \right.$$

Mit  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$  folgt

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

und in entsprechender Weise

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Für den gemeinsamen Nenner von  $x_1$  und  $x_2$  kann man die symbolische Schreibweise

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

verwenden, wenn man für  $D$  den Wert  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$  versteht.

Analog können der Zähler von  $x_1$  und  $x_2$  durch

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

## 2 1.2. DETERMINANTEN ZWEITER ORDNUNG

---

ausgedrückt werden.

Damit erhält man

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \quad D \neq 0.$$

- ▷ Dieses Verfahren, **Cramersche Regel** genannt, kann auch für  $n$  Gleichungen mit  $n$  Unbekannten angewandt werden. Der damit verbundene Rechenaufwand wächst für  $n \geq 4$  mit zunehmendem  $n$  stark an.

### 1.2 Determinanten zweiter Ordnung

#### 1.2.1 Definition

Der Ausdruck

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

heißt **Determinante zweiter Ordnung** oder zweireihige Determinante und besitzt den Wert

$$D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

**Anmerkungen:**

1. Die Elemente  $a_{ik}$  der Determinante sind zwischen zwei senkrechten Strichen angeordnet.
2. Die Determinante besteht aus zwei **Zeilen** und aus zwei **Spalten**; Zeilen und Spalten nennt man **Reihen**.
3. Die Diagonale von links oben nach rechts unten heißt **Hauptdiagonale**, die Diagonale von links unten nach rechts oben heißt **Nebendiagonale**.
4. Für ein Element  $a_{ik}$  gibt der erste Index die Zeile, der zweite Index die Spalte an, in der sich das Element befindet.

Der **Wert einer zweireihigen Determinante** ist somit das Produkt der Elemente der Hauptdiagonale, vermindert um das Produkt der Elemente der Nebendiagonale.

$$\boxed{\text{B}} \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - 2 \cdot (-1) = 38.$$

#### 1.2.2 Eigenschaften

Unter Verwendung der Eigenschaften von Determinanten können diese umgeformt und ihr Wert berechnet werden.

- ▷ Die folgenden Eigenschaften für zweireihige Determinanten sind auch für drei- und mehrreihige Determinanten gültig.

#### Erste Eigenschaft

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man Zeilen und Spalten vertauscht, d. h. ihre Elemente spiegelbildlich zur Hauptdiagonalen anordnet (sie „stürzt“).

$$\boxed{\text{B}} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

#### Zweite Eigenschaft

Eine Determinante hat den Wert Null, wenn

- alle Elemente einer Reihe Null sind oder
- alle Elemente einer Reihe den entsprechenden Elementen einer parallelen Reihe proportional sind.

$$\boxed{\text{B}} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ca_{11} & ca_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

#### Dritte Eigenschaft

Der Wert einer Determinante ändert sein Vorzeichen, wenn man zwei parallele Reihen vertauscht.

$$\boxed{\text{B}} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

#### Vierte Eigenschaft

Eine Determinante wird mit einem Faktor multipliziert, indem man alle Elemente einer Reihe mit diesem Faktor multipliziert.

$$\boxed{\text{B}} \quad c \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & ca_{22} \end{vmatrix}.$$

- ▷ Häufig wird die Umkehrung dieser Eigenschaft benutzt, indem man einen Faktor, den alle Elemente einer Reihe enthalten, vor die Determinante zieht.

#### Fünfte Eigenschaft

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu den Elementen einer Reihe die mit einem Faktor multiplizierten Elemente einer parallelen Reihe addiert.

$$\boxed{\text{B}} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} \end{vmatrix} \\ = a_{11}(a_{22} + ca_{12}) - a_{12}(a_{21} + ca_{11}) \\ = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

**Sechste Eigenschaft**

Der Wert einer Determinante ist gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonale, wenn das (die) Element(e) unterhalb oder oberhalb der Hauptdiagonale Null ist (sind); eine solche Form der Determinante nennt man **Dreiecksform**.

**B** 
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

**1.3 Determinanten dritter Ordnung**

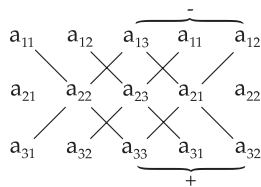
**1.3.1 Definition und Wertberechnung**

Der Ausdruck

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

heißt **Determinante dritter Ordnung** oder dreireihige Determinante.

Die Berechnung des Wertes von  $D$  kann nach der Regel von Sarrus erfolgen. Dazu werden zunächst die Elemente der ersten und zweiten Spalte nach den Elementen der dritten Spalte angeordnet. Es entsteht das Schema



**Regel von Sarrus**

Der Wert  $D$  einer Determinante dritter Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ist gleich der Summe der Produkte der in drei Diagonalen im Schema von links oben nach rechts unten angeordneten Elemente, vermindert um die Summe der Produkte der in drei Diagonalen im Schema von links unten nach rechts oben angeordneten Elemente:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

**B** Es ist der Wert  $D$  von

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

zu ermitteln.  
Mit dem Schema

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

erhält man

$$\begin{aligned} D &= 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 3 \\ &= -8. \end{aligned}$$

## 1.4 Determinanten $n$ -ter Ordnung

### 1.4.1 Definition und Entwicklungssatz

Der Ausdruck

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ik}|, \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

heißt **Determinante  $n$ -ter Ordnung** oder  $n$ -reihige Determinante.

Die Berechnung des Wertes von  $D$  kann nach dem Entwicklungssatz von Laplace erfolgen. Dazu benötigt man die Begriffe Unterdeterminante und Adjunkte.

Die **Unterdeterminante**  $D_{ik}$  zum Element  $a_{ik}$  einer Determinante  $D$  ist die Determinante, die entsteht, indem man in  $D$  die Elemente der  $i$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Spalte streicht.

▷ Von einer Determinante  $n$ -ter Ordnung können  $n^2$  Unterdeterminanten je  $(n-1)$ -ter Ordnung gebildet werden.

Die **Adjunkte**  $A_{ik}$  ist die vorzeichenbehaftete Unterdeterminante  $D_{ik}$ :

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}.$$

**[B]** Für  $D_{12}$  und  $A_{12}$  von

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ergibt sich

$$D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

▷ Es ist  $D_{ik} = A_{ik}$  für geradzahliges  $i+k$  und  $D_{ik} = -A_{ik}$  für ungeradzahliges  $i+k$ .

#### Entwicklungssatz von Laplace

Der Wert von  $D$  kann durch Entwicklung der Determinante nach den Elementen einer beliebigen Reihe erfolgen, wobei als Entwicklungsvorschrift

$$D = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

für die Entwicklung von  $D$  nach den Elementen der  $i$ -ten Zeile und

$$D = \sum_{i=1}^n a_{ik}A_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

für die Entwicklung von  $D$  nach den Elementen der  $k$ -ten Spalte gilt.

▷ Der Rechenaufwand beim Berechnen des Wertes einer Determinante wird verringert, indem man die Determinante nach den Elementen derjenigen Reihe entwickelt, die die meisten Nullen enthält.

**B** Durch Entwicklung nach den Elementen der zweiten Spalte erhält man

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} &= (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)(3-2) - 3(-2-4) = 17. \end{aligned}$$

### 1.4.2 Vorteilhafte Berechnung des Wertes einer Determinante

Neben der Berechnung des Wertes einer Determinante unter Verwendung des Entwicklungssatzes können Determinanten vorteilhaft berechnet werden, indem man

- möglichst viele Nullen in einer Reihe durch Ausnutzung bestimmter Eigenschaften erzeugt und danach den Entwicklungssatz anwendet,
- sie in eine Dreiecksform überführt.

**B** Der Wert der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 13 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -14 \end{vmatrix}$$

ist zu berechnen

1. durch Erzeugen möglichst vieler Nullen in einer Reihe,
2. durch Überführen in eine Dreiecksform.

Lösung:

1. Unter Verwendung von  $a_{23} = 1$  (Pivotelement: Element, auf das wir uns bei der Nullengewinnung stützen) werden die übrigen Elemente der dritten Spalte in Null überführt. Das geschieht durch Anwendung der Eigenschaften für Determinanten. (Die Faktoren und Operationen sind außerhalb der Determinante vermerkt.)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 13 \\ 5 & 2 & \boxed{1} & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -14 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \uparrow + \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-1) \\ \downarrow + \\ \downarrow + \end{array} \cdot 2$$

$$= \begin{vmatrix} -13 & -1 & 0 & -8 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \\ 12 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Nach Anwendung des Entwicklungssatzes und entsprechenden Umformungen der Determinante dritter Ordnung erhält man

$$D = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -13 & -1 & -8 \\ -2 & 1 & -5 \\ 12 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (+1) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} +13 & +1 & 8 \\ -2 & 1 & -5 \\ 4 & \boxed{1} & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \cdot(-4) \end{array}$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 1 & 8 \\ -6 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-9) \cdot (-15 + 16) = -9.$$

2. Nach Vertauschen von zweiter mit erster Zeile sowie dritter mit erster Spalte und anschließender Nullenermittlung erhält man

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 13 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -14 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 13 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -14 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 13 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -14 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \cdot(-1) \\ \downarrow + \\ \downarrow + \\ \downarrow + \end{array} \cdot 2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & \boxed{-1} & -13 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 12 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \downarrow + \\ \downarrow + \end{array} \cdot 3$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & -15 & -13 \\ 0 & 0 & -27 & -24 \end{vmatrix} \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) \stackrel{\downarrow +}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & -15 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt das Ergebnis

$$D = 1 \cdot (-1) \cdot (-15) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -9.$$

### 1.4.3 Weitere Anwendungen

**B Tetraedervolumen:**

Vier nicht in einer Ebene liegende Punkte  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , bilden ein Tetraeder. Die Maßzahl  $V$  seines Volumens ist

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},$$

der Betrag der angeführten Determinante vierter Ordnung.

**B Ebenengleichung:**

Drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , bilden eine Ebene. Die Ebenengleichung lautet

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Ausrechnen der Determinante erhält man die Normalform der Ebenengleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

**B Dreiecksfläche:**

Die Maßzahl  $A$  der Fläche eines durch die Eckpunkte  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , gegebenen Dreiecks ist

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix},$$

der Betrag der angeführten Determinante dritter Ordnung.

**[B] Geradengleichung:**

Eine Gerade durch zwei Punkte  $P_1(x_1, y_1)$  und  $P_2(x_2, y_2)$  ist gegeben durch

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Ausrechnen der Determinante erhält man die Zweipunkteform der Geraden

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 - x_1 \neq 0.$$

**[B] Funktionaldeterminante:**

Für eine Funktion der Form

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}$$

bezeichnet man den Ausdruck

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

als Funktionaldeterminante.

▷ Die Umkehrung einer Koordinatentransformation, d.h., die Ermittlung von

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned}$$

aus einer Beziehung

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}$$

ist nur dann möglich, wenn für mindestens einen Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  gilt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

**B** **Wronski-Determinante:**  
Determinante der Form

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

- ▷ Der Wert der Wronski-Determinante gibt Auskunft über die lineare Unabhängigkeit von Funktionen: Sind insbesondere  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung und ist für eine Stelle  $x_0$  ihres gemeinsamen Definitionsbereiches  $W(x_0) \neq 0$ , so sind die Funktionen  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  linear unabhängig.

## 2 Matrizen

### 2.1 Einführendes Beispiel

Die Montage von drei verschiedenen Endprodukten  $E_1, E_2, E_3$  erfolgt durch das Zusammensetzen von vier vorgefertigten Zwischenprodukten  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ . Alle  $Z_i, i = 1, 2, 3, 4$ , werden aus drei Grundprodukten  $G_1, G_2, G_3$  hergestellt.

Die benötigten Mengeneinheiten zur Herstellung einer Mengeneinheit der End- und Zwischenprodukte sind in folgenden Übersichten zusammengestellt:

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$
$E_1$	2	1	3	0
$E_2$	3	2	1	1
$E_3$	0	3	1	2

	$G_1$	$G_2$	$G_3$
$Z_1$	3	1	5
$Z_2$	4	1	2
$Z_3$	0	1	3
$Z_4$	2	1	4

Es ist die Anzahl der Mengeneinheiten der Grundprodukte zu ermitteln, die zur Herstellung einer Mengeneinheit der Endprodukte erforderlich sind.

Lösung:

Zwischen End- und Zwischenprodukten besteht der Zusammenhang

$$E_1 = 2Z_1 + Z_2 + 3Z_3$$

$$E_2 = 3Z_1 + 2Z_2 + Z_3 + Z_4$$

$$E_3 = 3Z_2 + Z_3 + 2Z_4.$$

Setzt man in diese Gleichungen die entsprechenden Zusammenhänge von Zwischen- und Grundprodukten ein, so erhält man

$$E_1 = 10G_1 + 6G_2 + 21G_3$$

$$E_2 = 19G_1 + 7G_2 + 26G_3$$

$$E_3 = 16G_1 + 6G_2 + 17G_3.$$

Dieses Ergebnis kann in der folgenden übersichtlichen Form dargestellt werden.

	$G_1$	$G_2$	$G_3$
$E_1$	10	6	21
$E_2$	19	7	26
$E_3$	16	6	17

Das hier auftretende Zahlenschema mit drei Zeilen und drei Spalten nennt man (3,3)-Matrix. Auf der Menge aller Objekte dieser Art können Verknüpfungen wie Addition und Multiplikation definiert und Operationen durchgeführt werden, die bei der Lösung vieler mathematischer und technischer Probleme von großem Nutzen sind.

- ▷ Mit Hilfe der Matrizenrechnung können z.B. bei höherstufigen Verflechtungen und größerem Zahlenmaterial die Ergebnisse mit relativ wenig Aufwand übersichtlich gestaltet werden.

## 2.2 Grundbegriffe

### 2.2.1 Definition und Gleichheit von Matrizen

Ein rechteckiges System von  $m \cdot n$  Elementen  $a_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , die in  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten angeordnet sind, heißt Matrix vom Typ  $m, n$  oder  $(m, n)$ -Matrix, und man schreibt

$$\mathbf{A}_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik})_{m,n} \quad (2.1)$$

$i = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ .

- ▷ Im Unterschied zu Determinanten besitzen Matrizen keinen Wert; sie stellen Anordnungen von Elementen dar. Die Elemente können Zahlen, Vektoren, Polynome oder andere mathematische Objekte sein.

**Anmerkung:** Die Elemente  $a_{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$  bilden die Hauptdiagonale von  $\mathbf{A}_{m,n}$ .

- [B] Der Verbrauch von Grundprodukten für Zwischenprodukte aus dem einführenden Beispiel kann durch die Matrix

$$A_{4,3} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ 4 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 1 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ausgedrückt werden. (Die Hauptdiagonalelemente sind fett dargestellt.)

#### **Gleichheit:**

Zwei Matrizen  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  und  $\mathbf{B} = (b_{ik})$  sind gleich, wenn sie vom gleichen Typ sind, d. h. die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten besitzen und  $a_{ik} = b_{ik}$  für alle  $i$  und  $k$  gilt.

- ▷ Im Vergleich dazu sind Determinanten gleich, wenn sie denselben Wert haben, unabhängig von ihrer Ordnung und der Größe ihrer Elemente.

### 2.2.2 Spezielle Matrizen

#### **Spaltenmatrix:**

Matrix  $\mathbf{A}_{m,1}$ , die aus einer Spalte und  $m$  Zeilen besteht:

$$\mathbf{A}_{m,1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \vec{a}.$$

$\mathbf{A}_{m,1}$  wird  $m$ -dimensionaler **Spaltenvektor** genannt.