

L. D. Landau · E. M. Lifschitz
Lehrbuch der Theoretischen Physik
Band III

L. D. Landau · E. M. Lifschitz

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Der Klassiker der gesamten Theoretischen Physik für den Studenten und Wissenschaftler.

Band 1:

Mechanik

unveränderter Nachdruck der 14., korrigierten Auflage 1997, 2016, 231 Seiten, 56 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5612-2

Band 2:

Klassische Feldtheorie

unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1992, 2018, 496 Seiten, 25 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5562-0

Band 3:

Quantenmechanik

unveränderter Nachdruck der 9. Auflage 1986, 2021, 660 Seiten, 57 Abbildungen, 11 Tabellen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5636-8

Band 4:

Quantenelektrodynamik

unveränderter Nachdruck der 7., berichtigten Auflage 1991, 2020, 628 Seiten, 25 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5632-0

Band 5:

Statistische Physik Teil 1

unveränderter Nachdruck der 8., berichtigten Auflage 1991, 2016, 535 Seiten, 78 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5654-2

Band 6:

Hydrodynamik

korrigierter Nachdruck der 5., überarbeiteten Auflage 1991, 2014, 705 Seiten, 136 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5554-5

Band 7:

Elastizitätstheorie

unveränderter Nachdruck der 7. Auflage 1991, 2010, 223 Seiten, 32 Abbildungen, Leinen, ISBN 978-3-8085-5498-2

Band 8:

Elektrodynamik der Kontinua

unveränderter Nachdruck der 5., ergänzten Auflage 1990, 2020, 565 Seiten, 65 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5500-2

Band 9:

Statistische Physik Teil 2

unveränderter Nachdruck der 4., berichtigten Auflage 1992, 2020, 404 Seiten, 18 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5656-6

Band 10:

Physikalische Kinetik



unveränderter Nachdruck der 2. Auflage 1990, 2020, 480 Seiten, 35 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5624-5

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:

L. D. Landau · E. M. Lifschitz, **Lehrbuch der Theoretischen Physik**

ISBN 978-3-8085-5588-0



Edition
Harri 
Deutsch 

L. D. Landau • E. M. Lifschitz

Quantenmechanik

Mit 57 Abbildungen und 11 Tabellen

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56368

Titel der Originalausgabe:

Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицу
Квантовая механика (нерелятивистская теория)

Erschienen im Verlag NAUKA, Moskau 1974

Die späteren Auflagen wurde unter Mitwirkung von L. P. Pitajewski bearbeitet.

In deutscher Sprache herausgegeben von Prof. Dr. habil. Paul Ziesche, Dresden.
Übersetzt aus dem Russischen von Prof. Dr. A. Kühnel, Leipzig.

Unveränderter Nachdruck der 9. Auflage 1986, 2021
Druck 5

ISBN 978-3-8085-5636-8

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2019 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Umschlaggestaltung: Medienwerkstatt Dreimaster / www.3master.de, 63546 Hammersbach
Druck: Totem, 88–100 Inowroclaw, Poland

VORWORT DES HERAUSGEBERS ZUR DEUTSCHEN AUSGABE

In der Fachwelt genießt das umfassende, zehnbändige Lehrbuch der Theoretischen Physik von L. D. LANDAU † und E. M. LIFSCHITZ hohes Ansehen. Auch der Band III — der nichtrelativistischen Quantentheorie und ihren vielfältigen Anwendungen gewidmet — trägt zu diesem hohen Ansehen bei. Darstellung und Stil sind, wie auch in den anderen Bänden, sehr elegant und modern. Im Unterschied zu manchen mehr abstrakten Darstellungen der Quantentheorie werden hier die physikalischen Aussagen und Zusammenhänge gegenüber dem Mathematisch-Formalen klar herausgearbeitet. Besonders wertvoll ist auch die sehr ausführliche Behandlung einer ganzen Reihe konkreter Anwendungen, so zur Theorie der Atome, der zwei- und mehratomigen Moleküle, des Atomkerns usw. Dabei kommen auch die Bewegung im Zentralfeld, im Magnetfeld, die Störungstheorie, der quasiklassische Grenzfall, die Theorie der Symmetrie, der Addition von Drehimpulsen, der elastischen und unelastischen Stöße eingehend zur Sprache. Zahlreiche Aufgaben ergänzen den Text.

Dieser neuen deutschen Auflage liegt die dritte, überarbeitete, russische Auflage zugrunde. Deren zahlreiche Änderungen und Ergänzungen machten eine vollständige Neuübersetzung notwendig, die in bewährter Weise von Herrn A. KÜHNEL angefertigt wurde. Bis zu seinem Tode am 29. Okt. 1985 hat Herr Professor E. M. LIFSCHITZ regelmäßig bei der Vorbereitung von Auflagen der deutschen Ausgabe geholfen. Beim Korrekturlesen wurde ich dankenswerter Weise von den Herren B. PIETRASS und W. KELLER unterstützt, den Herren D. SCHLÜTER und M. HIETSCHOLD sowie R. BRACHOLDT und J. GRÄFENSTEIN danke ich für wertvolle Hinweise auf Druckfehler.

Dresden, September 1986

P. ZIESCHE

VORWORT ZUR DRITTEN RUSSISCHEN AUFLAGE

Die Herausgabe der zweiten Auflage dieses Bandes war die letzte Arbeit an einem Buch, die gemeinsam mit meinem Lehrer L. D. LANDAU auszuführen mir vergönnt war. Die damals vorgenommene Überarbeitung und Ergänzung dieses Buches waren sehr umfangreich und erfaßten alle Kapitel.

Für diese neue Auflage war natürlich eine wesentlich geringere Bearbeitung erforderlich. Trotzdem ist eine beträchtliche Menge neuen Stoffes (darunter auch neue Aufgaben) hinzugekommen. Es sind einmal Ergebnisse der letzten Jahre neu aufgenommen worden, und zum anderen wurden ältere Ergebnisse einbezogen, die in der letzten Zeit eine erhöhte Aufmerksamkeit auf sich gelenkt haben.

LEW DAWIDOWITSCH LANDAU beherrschte den Apparat der Theoretischen Physik in einem solch hohen Maße, daß er bei der Wiedergabe von Ergebnissen seinen eigenen Weg gehen konnte, ohne irgendwie auf die Originalarbeiten verweisen zu müssen. Dadurch könnten in dem Buch einige notwendige Literaturhinweise fehlen; ich habe mich bemüht, sie in dieser Auflage nach Möglichkeit zu ergänzen. Gleichzeitig habe ich Hinweise auf LEW DAWIDOWITSCH LANDAU an denjenigen Stellen eingefügt, an denen Ergebnisse oder Methoden dargestellt werden, die von ihm selbst stammen und nicht in anderer Form veröffentlicht worden sind.

Wie auch bei der Arbeit an der Neuauflage anderer Bände dieses Lehrbuches haben mich bei der Bearbeitung dieses Bandes viele meiner Kollegen hilfreich unterstützt; sie haben mich auf mögliche Mängel in der bisherigen Darstellung hingewiesen und ihre Wünsche nach bestimmten Ergänzungen ausgesprochen. Ich habe von A. M. BRODSKI, G. F. DRUKAREW, I. G. KAPLAN, W. P. KRAJNOW, I. B. LEWINSON, P. E. NEMIROWSKI, W. L. POKROWSKI, I. I. SOBELMAN und I. S. SCHAPIRO eine ganze Reihe nützlicher Hinweise erhalten, die in der vorliegenden Auflage dieses Buches berücksichtigt worden sind; ich möchte ihnen allen meinen herzlichen Dank aussprechen.

Ich habe die ganze Arbeit an der Neuauflage dieses Bandes in enger Zusammenarbeit mit L. P. PITAJEWSKI vorgenommen. Es ist mir geglückt, in seiner Person einen Arbeitsgefährten zu finden, der ebenfalls aus der LANDAUSCHEN Schule hervorgegangen und von den gleichen wissenschaftlichen Idealen beseelt ist.

Institut für Physikalische Probleme
der Akademie der Wissenschaften der UdSSR
Moskau, im November 1973

E. M. LIFSCHITZ

AUS DEM VORWORT ZUR ERSTEN RUSSISCHEN AUFLAGE

Der vorliegende Band des Lehrbuches der Theoretischen Physik befaßt sich mit der Darstellung der Quantenmechanik. Wegen des sehr umfangreichen Stoffes erscheint es zweckmäßig, diesen Band in zwei Teilen vorzulegen. Der hiermit veröffentlichte erste Teil enthält die nichtrelativistische Theorie, während die relativistische Theorie der Inhalt des zweiten Teiles sein wird.

Unter der relativistischen Theorie verstehen wir im weitesten Sinne des Wortes die Theorie aller Quantenerscheinungen, für die die Lichtgeschwindigkeit eine wesentliche Rolle spielt. Dementsprechend gehören dazu sowohl die relativistische DIRAC-Theorie und damit zusammenhängende Probleme, als auch die gesamte Quantentheorie der Strahlung.

Neben den Grundlagen der Quantenmechanik sind in dem vorliegenden Buch auch viele Anwendungen derselben enthalten, in viel größerem Umfang, als es üblicherweise in allgemeinen Lehrbüchern der Quantenmechanik der Fall ist. Wir haben nur solche Probleme hier nicht aufgegriffen, deren Untersuchung gleichzeitig eine eingehende Analyse der experimentellen Befunde erfordern würde; das würde unvermeidlich über den Rahmen dieses Buches hinausgehen.

Bei der Darstellung konkreter Probleme haben wir uns um größtmögliche Vollständigkeit bemüht. Im Zusammenhang damit haben wir Hinweise auf die Originalarbeiten als überflüssig erachtet und uns auf die Angabe der jeweiligen Autoren beschränkt.

Wie in den vorhergehenden Bänden haben wir uns bei der Darstellung der allgemeinen Fragen bemüht, nach Möglichkeit das physikalische Wesen der Theorie herauszustellen und darauf den mathematischen Apparat aufzubauen. Das zeigt sich besonders in den ersten Paragraphen dieses Buches, in denen die allgemeinen Eigenschaften der quantenmechanischen Operatoren behandelt werden. Die übliche Darstellung geht von den mathematischen Sätzen über lineare Operatoren aus. Im Gegensatz dazu gehen wir von der physikalischen Problemstellung aus und leiten die mathematischen Forderungen her, die an die Operatoren und die Eigenfunktionen gestellt werden müssen.

Man kann nicht umhin festzustellen, daß die Darstellung in vielen Lehrbüchern der Quantenmechanik komplizierter als in den Originalarbeiten ist. Obwohl eine solche Darstellung gewöhnlich mit größerer Allgemeinheit und Strenge begründet wird, ist jedoch bei aufmerksamer Betrachtung leicht zu erkennen, daß sowohl das eine wie das andere tatsächlich oft illusorisch sind, was sogar soweit geht, daß sich ein beträchtlicher Teil der „strengen“ Sätze als fehlerhaft erweist. Da uns eine solche komplizierte Darstellung völlig ungerechtfertigt erscheint, haben wir uns umgekehrt um denkbar

mögliche Einfachheit bemüht und haben vielfach auf die Originalarbeiten zurückgegriffen.

Einige rein mathematische Angaben haben wir am Ende des Buches als „Mathematische Ergänzungen“ angefügt, um die Darstellung im Text nach Möglichkeit nicht durch Hinwendung zu der rein rechnerischen Seite zu unterbrechen. Diese Ergänzungen sind auch zum Nachschlagen gedacht.

Moskau, im Mai 1947

L. D. LANDAU, E. M. LIFSCHITZ

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel I.	Die Grundbegriffe der Quantenmechanik	1
§	1. Das Unbestimmtheitsprinzip	1
§	2. Das Superpositionsprinzip	6
§	3. Operatoren	8
§	4. Addition und Multiplikation von Operatoren	12
§	5. Das kontinuierliche Spektrum	15
§	6. Der Übergang zur klassischen Mechanik	19
§	7. Wellenfunktion und Messungen	20
Kapitel II.	Energie und Impuls	24
§	8. Der HAMILTON-Operator	24
§	9. Die Zeitableitung von Operatoren	25
§	10. Stationäre Zustände	26
§	11. Matrizen	29
§	12. Die Transformation von Matrizen	34
§	13. Das HEISENBERG-Bild für Operatoren	36
§	14. Die Dichtematrix	37
§	15. Der Impuls	40
§	16. Die Unschärferelationen	44
Kapitel III.	Die SCHRÖDINGER-Gleichung	48
§	17. Die SCHRÖDINGER-Gleichung	48
§	18. Grundeigenschaften der SCHRÖDINGER-Gleichung	51
§	19. Die Stromdichte	53
§	20. Das Variationsprinzip	56
§	21. Allgemeine Eigenschaften der eindimensionalen Bewegung	58
§	22. Der Potentialtopf	61
§	23. Der lineare harmonische Oszillator	65
§	24. Die Bewegung im homogenen Feld	72
§	25. Der Durchgangskoeffizient	74
Kapitel IV.	Der Drehimpuls	81
§	26. Der Drehimpuls	81
§	27. Die Eigenwerte des Drehimpulses	84
§	28. Die Eigenfunktionen des Drehimpulses	88
§	29. Die Matrixelemente von vektoriellen Größen	91

X Inhaltsverzeichnis

§ 30. Die Parität eines Zustandes	95
§ 31. Die Addition von Drehimpulsen	97
Kapitel V. Die Bewegung im kugelsymmetrischen Feld	101
§ 32. Die Bewegung im kugelsymmetrischen Feld	101
§ 33. Kugelwellen	104
§ 34. Die Entwicklung einer ebenen Welle	111
§ 35. Der Sturz eines Teilchens in das Zentrum	113
§ 36. Die Bewegung im COULOMB-Feld (Kugelkoordinaten)	115
§ 37. Die Bewegung im COULOMB-Feld (parabolische Koordinaten)	127
Kapitel VI. Störungstheorie	130
§ 38. Zeitunabhängige Störungen	130
§ 39. Die Säkulargleichung	135
§ 40. Zeitabhängige Störungen	138
§ 41. Übergänge infolge einer zeitlich begrenzten Störung	142
§ 42. Übergänge infolge einer periodischen Störung	147
§ 43. Übergänge im kontinuierlichen Spektrum	149
§ 44. Die Unschärferelation für die Energie	152
§ 45. Die potentielle Energie als Störung	155
Kapitel VII. Der quasiklassische Fall	159
§ 46. Die Wellenfunktion im quasiklassischen Fall	159
§ 47. Die Randbedingungen im quasiklassischen Fall	162
§ 48. Die Quantisierungsvorschrift von BOHR und SOMMERFELD	165
§ 49. Die quasiklassische Bewegung im kugelsymmetrischen Feld	170
§ 50. Das Durchdringen eines Potentialwalles	173
§ 51. Die Berechnung der quasiklassischen Matrixelemente	179
§ 52. Die Übergangswahrscheinlichkeit im quasiklassischen Fall	183
§ 53. Übergänge infolge adiabatischer Störungen	187
Kapitel VIII. Der Spin	191
§ 54. Der Spin	191
§ 55. Der Spinoperator	195
§ 56. Spinoren	198
§ 57. Die Wellenfunktionen für Teilchen mit beliebigem Spin	202
§ 58. Der Operator für endliche Drehungen	207
§ 59. Die teilweise Polarisation von Teilchen	213
§ 60. Die Zeitumkehr und der KRAMERSSche Satz	215
Kapitel IX. Identische Teilchen	218
§ 61. Das Prinzip der Ununterscheidbarkeit gleichartiger Teilchen	218
§ 62. Die Austauschwechselwirkung	221
§ 63. Die Symmetrie bei Vertauschungen	225
§ 64. Die zweite Quantelung. BOSE-Statistik	233
§ 65. Die zweite Quantelung. FERMI-Statistik	238

Kapitel X. Das Atom	241
§ 66. Die Energieniveaus eines Atoms	241
§ 67. Die Elektronenzustände in einem Atom	242
§ 68. Die Energieniveaus wasserstoffähnlicher Atome	246
§ 69. Das selbstkonsistente Feld	247
§ 70. Die THOMAS-FERMI-Gleichung.	251
§ 71. Die Wellenfunktionen der äußeren Elektronen in Kernnähe	256
§ 72. Die Feinstruktur der Atomniveaus	257
§ 73. Das Periodensystem	261
§ 74. Die Röntgenterme	267
§ 75. Die Multipolmomente	269
§ 76. Ein Atom im elektrischen Feld	273
§ 77. Ein Wasserstoffatom in einem elektrischen Feld	278
Kapitel XI. Das zweiatomige Molekül	289
§ 78. Die Elektronenterme eines zweiatomigen Moleküls.	289
§ 79. Das Überschneiden von Elektronentermen	291
§ 80. Der Zusammenhang zwischen Molekül- und Atomtermen	295
§ 81. Die Wertigkeit	298
§ 82. Die Schwingungs- und die Rotationsstruktur der Singuletterme eines zweiatomigen Moleküls.	304
§ 83. Die Multipletterme. Fall <i>a</i>	310
§ 84. Die Multipletterme. Fall <i>b</i>	313
§ 85. Die Multipletterme. Fälle <i>c</i> und <i>d</i>	317
§ 86. Die Symmetrie der Molekülterme	319
§ 87. Die Matrixelemente für ein zweiatomiges Molekül	322
§ 88. Die Λ -Verdoppelung	326
§ 89. Die Wechselwirkung der Atome in großen Abständen	329
§ 90. Die Prädissoziation	332
Kapitel XII. Die Theorie der Symmetrie	343
§ 91. Symmetrietransformationen	343
§ 92. Transformationsgruppen	346
§ 93. Punktgruppen	349
§ 94. Darstellungen von Gruppen.	357
§ 95. Die irreduziblen Darstellungen der Punktgruppen	364
§ 96. Irreduzible Darstellungen und Klassifizierung der Terme	368
§ 97. Die Auswahlregeln für die Matrixelemente	370
§ 98. Stetige Gruppen.	374
§ 99. Die zweideutigen Darstellungen der endlichen Punktgruppen	378
Kapitel XIII. Mehratomige Moleküle	383
§ 100. Die Klassifizierung der Molekülschwingungen	383
§ 101. Die Schwingungsniveaus	389
§ 102. Die Stabilität symmetrischer Molekülkonfigurationen	392
§ 103. Die Quantisierung der Rotation eines Kreisels	397
§ 104. Die Wechselwirkung von Molekülschwingungen und -rotation	405
§ 105. Die Klassifizierung der Molekülterme	409

XII Inhaltsverzeichnis

Kapitel XIV. Die Addition von Drehimpulsen	417
§ 106. Die $3j$ -Symbole	417
§ 107. Die Matrixelemente von Tensoren	425
§ 108. Die $6j$ -Symbole	428
§ 109. Die Matrixelemente bei der Addition von Drehimpulsen	434
§ 110. Die Matrixelemente für axialsymmetrische Systeme	435
Kapitel XV. Die Bewegung im Magnetfeld	439
§ 111. Die SCHRÖDINGER-Gleichung im Magnetfeld	439
§ 112. Die Bewegung im homogenen Magnetfeld	442
§ 113. Ein Atom im Magnetfeld	447
§ 114. Ein Spin in einem veränderlichen Magnetfeld	454
§ 115. Die Stromdichte in einem Magnetfeld	455
Kapitel XVI. Die Struktur des Atomkerns	458
§ 116. Die Isotopie-Invarianz	458
§ 117. Die Kernkräfte	462
§ 118. Das Schalenmodell	467
§ 119. Nichtsphärische Kerne	475
§ 120. Die Isotopieverschiebung	480
§ 121. Die Hyperfeinstruktur der Atomniveaus	482
§ 122. Die Hyperfeinstruktur der Molekül-niveaus	485
Kapitel XVII. Elastische Stöße	487
§ 123. Allgemeine Streutheorie	487
§ 124. Untersuchung der allgemeinen Formel	490
§ 125. Die Unitaritätsbedingung für die Streuung	493
§ 126. Die BORNsche Formel	497
§ 127. Der quasiklassische Fall	503
§ 128. Die analytischen Eigenschaften der Streuamplitude	508
§ 129. Die Dispersionsrelation	513
§ 130. Die Streuamplitude in der Impulsdarstellung	516
§ 131. Die Streuung bei hohen Energien	518
§ 132. Die Streuung langsamer Teilchen	525
§ 133. Resonanzstreuung bei niedrigen Energien	531
§ 134. Resonanz für quasidiskretes Niveau	537
§ 135. Die RUTHERFORDsche Streuformel	543
§ 136. Das System der Wellenfunktionen zum kontinuierlichen Spektrum	546
§ 137. Stöße gleichartiger Teilchen	549
§ 138. Resonanzstreuung geladener Teilchen	552
§ 139. Elastische Stöße schneller Elektronen mit Atomen	556
§ 140. Streuung bei Spin-Bahn-Wechselwirkung	560
§ 141. REGGE-Pole	566
Kapitel XVIII. Inelastische Stöße	572
§ 142. Elastische Streuung bei möglichen inelastischen Prozessen	572
§ 143. Inelastische Streuung langsamer Teilchen	577

§ 144. Die Streumatrix bei Reaktionen	580
§ 145. Die BREIT-WIGNER-Formel	583
§ 146. Wechselwirkung im Endzustand bei Reaktionen	591
§ 147. Das Verhalten von Streuquerschnitten in der Nähe einer Reaktions- schwelle	593
§ 148. Inelastische Stöße schneller Elektronen mit Atomen	599
§ 149. Die effektive Abbremsung	608
§ 150. Inelastische Stöße schwerer Teilchen mit Atomen	612
§ 151. Neutronenstreuung	614
§ 152. Inelastische Streuung bei hohen Energien	618
Mathematische Ergänzungen	624
§ a. Die HERMITESchen Polynome	624
§ b. Die AIRYSche Funktion	626
§ c. Die LEGENDRESchen Polynome	629
§ d. Die konfluente hypergeometrische Funktion	631
§ e. Die hypergeometrische Funktion	635
§ f. Die Berechnung von Integralen mit konfluenten hypergeometrischen Funk- tionen	637
Sachverzeichnis	647

EINIGE BEZEICHNUNGEN

Operatoren werden durch das Zeichen $\hat{}$ gekennzeichnet: \hat{f} .

Für das Volumenelement verwenden wir folgende Bezeichnungen:

im Ortsraum dV , im Konfigurationsraum dq , im Impulsraum d^3p .

Die Matrixelemente der Größe f sind (s. die Definition auf S. 29) f_{nm} oder $\langle n|f|m\rangle$.

Die Frequenzen bei Übergängen sind $\omega_{nm} = (E_n - E_m)/\hbar$.

Der Kommutator zweier Operatoren ist $\{\hat{f}, \hat{g}\} = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$.

Der HAMILTON-Operator ist \hat{H} .

Phasenverschiebungen von Wellenfunktionen werden mit δ_l bezeichnet. Wegen der atomaren und der COULOMB-Maßeinheiten, s. die Definition auf S. 116.

Vektor- und Tensorindizes werden mit lateinischen Buchstaben i, k, l bezeichnet.

Der antisymmetrische Einheitstensor ist e_{ikl} (Definition auf S. 83).

Das Zeichen \approx bedeutet „genähert gleich“, \sim „der Größenordnung nach gleich“, \propto „proportional zu“.

Hinweise auf Paragraphen und Formeln in anderen Bänden dieses Lehrbuches werden mit römischen Ziffern versehen: I = Band I, „Mechanik“, 1973 (1987); II = Band II, „Klassische Feldtheorie“, 1973 (1987); IV = Band IV, „Quantenelektrodynamik“, 1980 (1986).*)

*) Die Jahresangaben in Klammern beziehen sich auf die neuesten deutschen Ausgaben. – Anm. d. Herausg.

I

DIE GRUNDBEGRIFFE DER QUANTENMECHANIK

§ 1. Das Unbestimmtheitsprinzip

Versucht man, die klassische Mechanik und die klassische Elektrodynamik zur Erklärung der Erscheinungen in atomaren Bereichen zu verwenden, dann gelangt man zu Ergebnissen, die in krassem Widerspruch zum Experiment stehen. Am klarsten ist das bereits aus dem Widerspruch zu erkennen, der sich bei Anwendung der gewöhnlichen Elektrodynamik auf ein Atommodell ergibt, in dem sich die Elektronen auf klassischen Bahnen um den Kern bewegen. Bei dieser Bewegung müßten die Elektronen, wie bei jeder beschleunigten Bewegung von Ladungen, ununterbrochen elektromagnetische Wellen aussenden. Infolge dieser Strahlung müßten die Elektronen ihre Energie verlieren, was letzten Endes dazu führen müßte, daß sie in den Kern stürzen. Nach der klassischen Elektrodynamik wäre ein Atom also instabil, das entspricht in keiner Weise der Wirklichkeit.

Dieser tiefe Widerspruch zwischen der Theorie und dem Experiment deutet darauf hin, daß der Aufbau einer Theorie für die atomaren Erscheinungen eine grundsätzliche Änderung in den grundlegenden klassischen Vorstellungen und Gesetzen erfordert. Atomare Erscheinungen sind solche, die an Teilchen mit sehr kleiner Masse und in sehr kleinen Raumgebieten ablaufen.

Um diese Abänderung zu finden, gehen wir am einfachsten von der experimentell beobachteten Erscheinung der sogenannten Elektronenbeugung¹⁾ aus. Beim Durchgang eines homogenen Elektronenstrahles durch einen Kristall beobachtet man im durchgelassenen Strahl abwechselnd Intensitätsmaxima und -minima, völlig analog zu der Beugung elektromagnetischer Wellen. Unter gewissen Bedingungen weist also das Verhalten materieller Teilchen — der Elektronen — Züge auf, die für Wellenvorgänge charakteristisch sind.

Wie tief diese Erscheinung den üblichen Vorstellungen über die Bewegung von Teilchen widerspricht, kann man am besten aus folgendem Gedankenexperiment erkennen, das eine Idealisierung der Elektronenbeugung an einem Kristall darstellt. Wir stellen uns einen für die Elektronen undurchlässigen Schirm vor, in den zwei Spalte eingeschnitten sind. Wir beobachten nun den Durchgang des Elektronenstrahles²⁾ durch einen Spalt, während der andere Spalt abgedeckt ist. So erhalten wir auf einem

¹⁾ Die Erscheinung der Elektronenbeugung wurde in Wirklichkeit erst nach der Schaffung der Quantenmechanik entdeckt. In unserer Darstellung halten wir uns jedoch nicht an die historische Entwicklung der Theorie. Wir versuchen dagegen, sie so aufzubauen, daß sie möglichst klar die Zusammenhänge zwischen den Grundprinzipien der Quantenmechanik und den experimentell beobachteten Erscheinungen zeigt.

²⁾ Der Strahl wird als so verdünnt angenommen, daß die Wechselwirkung der Teilchen darin keine Rolle spielt.

Schirm hinter dem Spalt eine bestimmte Intensitätsverteilung. Wir erhalten ein anderes Bild auf dem Schirm, wenn wir den zweiten Spalt öffnen und den ersten abdecken. Beobachten wir nun den Durchgang des Strahles durch beide Spalte gleichzeitig, dann müßten wir auf Grund der üblichen Vorstellungen ein Bild erwarten, das eine einfache Überlagerung der beiden vorhergehenden ist. Jedes Elektron bewegt sich danach auf seiner Bahn und fliegt durch einen der Spalte, ohne auf die Elektronen, die durch den anderen Spalt hindurchgehen, einen Einfluß auszuüben. Die Erscheinung der Elektronenbeugung zeigt jedoch, daß wir in Wirklichkeit ein Beugungsbild erhalten, das sich wegen der Interferenz keineswegs auf die Summe der beiden Bilder von den einzelnen Spalten zurückführen läßt. Dieses Ergebnis kann natürlich nicht mit der Vorstellung von der Bewegung der Elektronen entlang einer Bahn in Einklang gebracht werden.

Die Mechanik, der die atomaren Erscheinungen gehorchen, die sogenannte *Quanten-* oder *Wellenmechanik*, muß also prinzipiell andere Vorstellungen über die Bewegung zugrunde legen als die klassische Mechanik. In der Quantenmechanik gibt es den Begriff der Bahn eines Teilchens nicht. Dies ist der Inhalt des sogenannten *Unbestimmtheitsprinzips*, eines der Grundprinzipien der Quantenmechanik, das 1927 von W. HEISENBERG entdeckt worden ist.¹⁾

Das Unbestimmtheitsprinzip lehnt die üblichen Vorstellungen der klassischen Mechanik ab und hat somit einen negativen Inhalt. Es ist natürlich für sich allein völlig unzureichend, um darauf eine neue Teilchenmechanik aufzubauen. Einer solchen Theorie müssen selbstverständlich irgendwelche positiven Behauptungen zugrunde liegen; wir werden diese später behandeln (§ 2). Um aber diese Behauptungen formulieren zu können, müssen wir zuerst die Art der Fragestellung klären, der sich die Quantenmechanik gegenüberstellt. Wir gehen dazu zunächst auf den besonderen Charakter des Verhältnisses der Quantenmechanik zur klassischen Mechanik ein.

Gewöhnlich kann eine allgemeinere Theorie unabhängig von einer weniger allgemeinen Theorie, die darin als Grenzfall enthalten ist, logisch geschlossen formuliert werden. So kann die relativistische Mechanik auf ihren eigenen Grundprinzipien aufgebaut werden, ohne irgendwie auf die NEWTONSche Mechanik zurückzugreifen. Die Formulierung der Grundlagen der Quantenmechanik ist prinzipiell unmöglich, ohne die klassische Mechanik heranzuziehen.

Da ein Elektron²⁾ keine bestimmte Bahnkurve besitzt, hat es auch keine anderen dynamischen Charakteristika.³⁾ Es ist daher klar, daß für ein System aus quantenmechanischen Objekten allein im allgemeinen keine logisch befriedigende Mechanik geschaffen werden kann. Um die Bewegung eines Elektrons quantitativ beschreiben zu können, müssen auch physikalische Objekte vorhanden sein, die mit genügender Genauigkeit der klassischen Mechanik gehorchen. Wenn ein Elektron mit einem *klassischen Objekt* in Wechselwirkung tritt, dann wird sich der Zustand des letzteren

¹⁾ Es ist interessant, daß der gesamte mathematische Apparat der Quantenmechanik in den Jahren 1925—1926 von W. HEISENBERG und E. SCHRÖDINGER geschaffen worden ist, also noch vor der Entdeckung des Unbestimmtheitsprinzips, das den physikalischen Inhalt dieses Apparates offenbart.

²⁾ In diesem und im folgenden Paragraphen werden wir der Kürze halber von einem Elektron sprechen und damit allgemein ein beliebiges Quantenobjekt meinen, d. h. ein Teilchen oder ein System von Teilchen, das der Quantenmechanik und nicht der klassischen Mechanik gehorcht.

³⁾ Wir meinen damit Größen zur Beschreibung der Bewegung des Elektrons und nicht zur Charakterisierung des Elektrons als Teilchen (Ladung, Masse); letztere sind Parameter.

im allgemeinen ändern. Die Art und die Größe dieser Änderung hängen vom Zustand des Elektrons ab und können daher zur quantitativen Beschreibung desselben benutzt werden.

In diesem Zusammenhang nennt man das *klassische Objekt* gewöhnlich *Meßgerät*, den Vorgang der Wechselwirkung mit einem Elektron bezeichnet man dabei als *Messung*. Man muß jedoch betonen, daß man damit keineswegs einen *Meßprozeß* meint, an dem ein physikalischer Beobachter teilnimmt. Unter einer *Messung* versteht man in der Quantenmechanik jeden Wechselwirkungsprozeß zwischen einem klassischen und einem Quantenobjekt, der unabhängig von irgendeinem Beobachter abläuft. Es war N. BOHR, der die große Rolle des Begriffes der *Messung* in der Quantenmechanik klargestellt hat.

Wir haben ein Meßgerät als ein physikalisches Objekt definiert, das mit genügender Genauigkeit der klassischen Mechanik gehorcht. So ein Gerät ist zum Beispiel ein Körper mit einer genügend großen Masse. Man darf jedoch nicht denken, daß ein Gerät unbedingt ein makroskopischer Gegenstand sein muß. Unter bestimmten Bedingungen kann auch ein offensichtlich mikroskopisches Objekt die Rolle eines Gerätes spielen, weil die Forderung „mit genügender Genauigkeit“ von der konkreten Fragestellung abhängt. So wird die Bewegung eines Elektrons in einer WILSONSchen Nebelkammer anhand der erzeugten Nebelspur beobachtet, deren Durchmesser im Vergleich zu atomaren Abmessungen groß ist. Bei dieser Genauigkeit der Bestimmung der Bahnkurve ist das Elektron ein vollkommen klassisches Objekt.

Die Quantenmechanik nimmt also eine sehr eigenartige Stellung unter den physikalischen Theorien ein: Sie enthält die klassische Mechanik als Grenzfall und bedarf gleichzeitig dieses Grenzfalles zu ihrer eigenen Begründung.

Wir können jetzt die Problemstellung der Quantenmechanik formulieren. Eine typische Problemstellung ist die Voraussage des Ergebnisses einer wiederholten *Messung* aus dem bekannten Ergebnis vorangegangener *Messungen*. Wir werden später sehen, daß die Quantenmechanik im allgemeinen gegenüber der klassischen Mechanik die Werte einschränkt, die verschiedene physikalische Größen (zum Beispiel die Energie) annehmen können; d. h. die Werte, die als Meßergebnisse für eine gegebene Größe beobachtet werden können, sind in der Quantenmechanik gegenüber der klassischen Mechanik eingeschränkt. Der Apparat der Quantenmechanik muß es ermöglichen, diese erlaubten Werte zu bestimmen.

Der Meßprozeß hat in der Quantenmechanik eine sehr wesentliche Besonderheit: Er wirkt immer auf das der *Messung* unterworfenen Elektron ein, und diese *Einwirkung* kann bei gegebener Meßgenauigkeit prinzipiell nicht beliebig klein gemacht werden. Je genauer die *Messung* ist, desto stärker ist die *Einwirkung* dabei. Nur bei *Messungen* mit sehr geringer Genauigkeit kann der *Einfluß* auf das Meßobjekt schwach sein. Diese Eigenschaft der *Messung* hängt logisch damit zusammen, daß die dynamischen Größen eines Elektrons nur im Ergebnis der *Messung* selbst in Erscheinung treten. Wenn die *Einwirkung* des Meßprozesses auf das Objekt beliebig klein gemacht werden könnte, dann würde das bedeuten, daß die zu messende Größe an sich einen bestimmten Wert hat, unabhängig von der *Messung*.

Unter den verschiedenen *Messungen* hat die *Ortsmessung* (*Messung* der Ortskoordinaten) für ein Elektron fundamentale Bedeutung. Im Anwendungsbereich der

Quantenmechanik kann der Ort eines Elektrons immer beliebig genau gemessen werden.¹⁾

Wir nehmen an, daß der Ort eines Elektrons nach bestimmten Zeitintervallen Δt immer wieder gemessen wird. Die Meßergebnisse liegen im allgemeinen nicht auf einer glatten Kurve. Im Gegenteil, je genauer die Messungen ausgeführt werden, desto sprungartiger und ungeordneter ist der Gang der Meßergebnisse, weil ja der Begriff der Bahnkurve für ein Elektron nicht vorhanden ist. Eine mehr oder weniger glatte Bahnkurve erhält man nur, wenn man den Ort eines Elektrons mit einer geringen Genauigkeit mißt, wie zum Beispiel durch die Kondensation des Dampfes in einer Nebelkammer.

Wenn man bei unveränderter Meßgenauigkeit die Intervalle Δt zwischen den Messungen verkürzt, dann werden aufeinanderfolgende Messungen natürlich dicht benachbarte Werte für die Koordinaten ergeben. Obwohl die Ergebnisse einer Reihe aufeinanderfolgender Messungen in einem kleinen Raumgebiet liegen werden, werden sie in diesem Gebiet vollkommen ungeordnet verteilt sein und keineswegs eine glatte Kurve bilden. Läßt man insbesondere Δt gegen Null streben, so werden die Ergebnisse aufeinanderfolgender Messungen ganz und gar nicht auf einer Geraden liegen.

Der letztere Sachverhalt lehrt, daß es in der Quantenmechanik den Begriff der Geschwindigkeit eines Teilchens im klassischen Sinne dieses Wortes nicht gibt, d. h. als Grenzwert des Quotienten aus der Differenz der Orte zu zwei Zeitpunkten und der zugehörigen Zeitdifferenz für $\Delta t \rightarrow 0$. Wir werden jedoch später sehen, daß man in der Quantenmechanik nichtsdestoweniger eine vernünftige Definition der Geschwindigkeit eines Teilchens in einem bestimmten Zeitpunkt geben kann und daß diese Geschwindigkeit beim Übergang zur klassischen Mechanik in die klassische Geschwindigkeit übergeht.

Während aber in der klassischen Mechanik ein Teilchen in jedem Zeitpunkt einen bestimmten Ort und eine bestimmte Geschwindigkeit hat, liegt in der Quantenmechanik ein ganz anderer Sachverhalt vor. Wenn ein Elektron im Ergebnis einer Messung einen bestimmten Ort eingenommen hat, dann hat es dabei überhaupt keine bestimmte Geschwindigkeit. Hat ein Elektron umgekehrt eine bestimmte Geschwindigkeit, dann kann es keinen bestimmten Ort im Raum einnehmen. Tatsächlich würde die gleichzeitige Existenz von bestimmtem Ort und bestimmter Geschwindigkeit in einem beliebigen Zeitpunkt das Vorhandensein einer bestimmten Bahnkurve bedeuten, die das Elektron aber nicht hat. In der Quantenmechanik sind also Ort und Geschwindigkeit eines Elektrons Größen, die nicht gleichzeitig genau gemessen werden können, d. h., sie können nicht gleichzeitig bestimmte Werte haben. Ort und Geschwindigkeit eines Elektrons sind Größen, die nicht gleichzeitig existieren. Später werden wir eine quantitative Beziehung herleiten, der zu entnehmen ist, wie groß die Ungenauigkeit bei der gleichzeitigen Messung von Ort und Geschwindigkeit mindestens ist.

Durch die Vorgabe aller Orte und Geschwindigkeiten in einem gegebenen Zeitpunkt wird in der klassischen Mechanik der Zustand eines physikalischen Systems vollständig beschrieben. Aus diesen Anfangswerten bestimmen die Bewegungsgleichungen das Verhalten eines Systems zu allen zukünftigen Zeiten. In der Quantenmechanik ist

¹⁾ Wir wollen noch einmal folgendes hervorheben: Wenn wir schreiben „gemessen werden“, dann meinen wir immer die Wechselwirkung eines Elektrons mit einem klassischen Gerät und setzen keinesfalls die Anwesenheit eines fremden Beobachters voraus.

eine solche Beschreibung prinzipiell unmöglich, weil Orte und zugehörige Geschwindigkeiten nicht gleichzeitig existieren. Die Beschreibung des Zustandes eines quantenmechanischen Systems erfolgt also mit weniger Größen als in der klassischen Mechanik, d. h., sie ist nicht so weitgehend wie die klassische.

Hieraus ergibt sich eine sehr wichtige Folgerung über die Art der Voraussagen in der Quantenmechanik. Während die klassische Beschreibung ausreicht, die Bewegung eines mechanischen Systems in der Zukunft völlig exakt vorauszusagen, kann die weniger weitgehende Beschreibung in der Quantenmechanik dazu nicht ausreichen. Hieraus folgt: Wenn sich ein Elektron in einem Zustand befindet, der so vollständig wie in der Quantenmechanik nur möglich beschrieben wird, dann ist sein Verhalten in den späteren Zeitpunkten trotzdem nicht eindeutig bestimmbar. Die Quantenmechanik kann keine streng bestimmten Voraussagen über das zukünftige Verhalten eines Elektrons machen. Zu einem gegebenen Anfangszustand eines Elektrons kann eine anschließende Messung verschiedene Ergebnisse liefern. Die Aufgabe der Quantenmechanik besteht nur in der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dieses oder jenes Ergebnis bei dieser Messung zu erhalten. Es versteht sich, daß die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Meßergebnis in manchen Fällen gleich 1 sein kann, d. h., sie kann zur Gewißheit werden, so daß das Ergebnis einer bestimmten Messung eindeutig wird.

Alle Meßprozesse in der Quantenmechanik können in zwei Kategorien eingeteilt werden. Die eine Kategorie, zu der die meisten Messungen gehören, umfaßt die Messungen, die für keinen Zustand des Systems mit Sicherheit ein eindeutiges Ergebnis liefern. Zur anderen Kategorie gehören die Messungen, bei denen es für jedes Ergebnis einen Zustand gibt, in dem eine Messung mit Sicherheit zu dem gegebenen Ergebnis führt. Gerade diese letzteren Messungen, die man als *voraussagbar* bezeichnen kann, spielen in der Quantenmechanik eine grundlegende Rolle. Die bei diesen Messungen bestimmten quantitativen Charakteristika eines Zustandes werden in der Quantenmechanik physikalische Größen genannt. Falls in einem Zustand eine Messung mit Sicherheit ein eindeutiges Ergebnis liefert, dann werden wir sagen, daß die betreffende physikalische Größe in diesem Zustand einen bestimmten Wert hat. Im folgenden werden wir überall den Ausdruck physikalische Größe in dem hier angegebenen Sinne verstehen.

Später werden wir uns noch vielfach davon überzeugen, daß bei weitem nicht jede Gesamtheit physikalischer Größen in der Quantenmechanik gleichzeitig gemessen werden kann, d. h. gleichzeitig bestimmte Werte haben kann. (Über ein Beispiel, Geschwindigkeit und Ort eines Elektrons, haben wir bereits gesprochen).

Gewisse Sätze physikalischer Größen mit den folgenden Eigenschaften spielen in der Quantenmechanik eine große Rolle: Diese Größen sind gleichzeitig meßbar. Wenn sie alle gleichzeitig bestimmte Werte haben, dann kann keine andere physikalische Größe (die keine Funktion der genannten ist) in diesem Zustand einen bestimmten Wert haben. Solche Sätze physikalischer Größen werden wir *vollständige Sätze* nennen.

Jede Beschreibung eines Zustandes eines Elektrons erhält man im Ergebnis einer Messung. Wir formulieren jetzt, was wir unter der vollständigen Beschreibung eines Zustandes in der Quantenmechanik verstehen wollen. Vollständig beschriebene Zustände erhält man als Ergebnis der gleichzeitigen Messung eines vollständigen Satzes physikalischer Größen. Aus den Ergebnissen dieser Messungen kann man insbesondere die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse jeder folgenden Messung unabhängig davon bestimmen, was mit dem Elektron vor der ersten Messung geschehen ist.

Im folgenden werden wir überall (lediglich mit Ausnahme von § 14) unter den Zuständen eines quantenmechanischen Systems solche Zustände verstehen, die gerade durch einen vollständigen Satz beschrieben werden.

§ 2. Das Superpositionsprinzip

Die radikale Veränderung der physikalischen Vorstellungen von der Bewegung in der Quantenmechanik gegenüber der klassischen Mechanik erfordert natürlich auch eine ebenso radikale Veränderung im mathematischen Apparat der Theorie. In diesem Zusammenhang erhebt sich vor allem die Frage, wie ein Zustand in der Quantenmechanik zu beschreiben ist.

Wir wollen mit q die Gesamtheit der Ortskoordinaten eines quantenmechanischen Systems bezeichnen und mit dq das Produkt der Differentiale dieser Koordinaten (dq wird als Volumenelement im Konfigurationsraum des Systems bezeichnet); für ein Teilchen ist dq gerade das Volumenelement dV des gewöhnlichen Raumes.

Dem mathematischen Apparat der Quantenmechanik liegt die Behauptung zugrunde, daß der Zustand eines Systems durch eine bestimmte (im allgemeinen komplexe) Ortsfunktion $\Psi(q)$ beschrieben werden kann. Das Betragsquadrat dieser Funktion gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Koordinaten an: $|\Psi|^2 dq$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich bei einer Messung am System Koordinaten im Element dq des Konfigurationsraumes ergeben. Die Funktion Ψ wird als *Wellenfunktion* des Systems bezeichnet.¹⁾

Die Kenntnis der Wellenfunktion ermöglicht im Prinzip die Berechnung der Wahrscheinlichkeit verschiedener Ergebnisse auch von irgendeiner anderen Messung (nicht nur einer Ortsmessung). Dabei werden alle diese Wahrscheinlichkeiten durch Ausdrücke gegeben, die in Ψ und Ψ^* bilinear sind. Die allgemeinste Gestalt eines solchen Ausdruckes ist

$$\iint \Psi(q) \Psi^*(q') \varphi(q, q') dq dq' . \quad (2,1)$$

Die Funktion $\varphi(q, q')$ hängt dabei von der Art und dem Ergebnis der Messung ab. Die Integration wird über den ganzen Konfigurationsraum erstreckt. Auch die Wahrscheinlichkeit $\Psi\Psi^* dq$ für die verschiedenen Werte der Ortskoordinaten ist selbst ebenfalls ein Ausdruck dieser Art.²⁾

Im Laufe der Zeit wird sich der Zustand eines Systems, und damit auch die Wellenfunktion, im allgemeinen ändern. In diesem Sinne kann man die Wellenfunktion auch als eine Funktion der Zeit ansehen. Wenn die Wellenfunktion in irgendeinem Anfangszeitpunkt bekannt ist, dann ist sie im Sinne der vollständigen Beschreibung eines Zustandes im Prinzip auch für alle zukünftigen Zeitpunkte bestimmt. Die tatsächliche Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion wird durch Gleichungen bestimmt, die wir im folgenden noch ableiten werden.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Ortskoordinaten eines Systems muß nach Definition gleich 1 sein. Deshalb muß das Integral über $|\Psi|^2$ über

¹⁾ E. SCHRÖDINGER hat sie als erster 1926 in die Quantenmechanik eingeführt.

²⁾ Er ergibt sich aus (2,1) für $\varphi(q, q') = \delta(q - q_0) \delta(q' - q_0)$; darin bedeutet δ die sogenannte δ -Funktion, die in § 5 definiert wird. Mit q_0 haben wir den Koordinatenwert bezeichnet, dessen Wahrscheinlichkeit wir suchen.