

L. D. Landau · E. M. Lifschitz
Lehrbuch der Theoretischen Physik
Band IX

L. D. Landau · E. M. Lifschitz

Lehrbuch der Theoretischen Physik

Der Klassiker der gesamten Theoretischen Physik für den Studenten und Wissenschaftler.

Band 1:

Mechanik

unveränderter Nachdruck der 14., korrigierten Auflage 1997, 2016, 231 Seiten, 56 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5612-2

Band 2:

Klassische Feldtheorie

unveränderter Nachdruck der 12. Auflage 1992, 2018, 496 Seiten, 25 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5562-0

Band 3:

Quantenmechanik

unveränderter Nachdruck der 9. Auflage 1986, 2019, 660 Seiten, 57 Abbildungen, 11 Tabellen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5636-8

Band 4:

Quantenelektrodynamik

unveränderter Nachdruck der 7., berichtigten Auflage 1991, 2009, 628 Seiten, 25 Abbildungen, Leinen, ISBN 978-3-8085-5632-0

Band 5:

Statistische Physik Teil 1

unveränderter Nachdruck der 8., berichtigten Auflage 1991, 2016, 535 Seiten, 78 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5654-2

Band 6:

Hydrodynamik

korrigierter Nachdruck der 5., überarbeiteten Auflage 1991, 2014, 705 Seiten, 136 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5554-5

Band 7:

Elastizitätstheorie

unveränderter Nachdruck der 7. Auflage 1991, 2010, 223 Seiten, 32 Abbildungen, Leinen, ISBN 978-3-8085-5498-2

Band 8:

Elektrodynamik der Kontinua

unveränderter Nachdruck der 5., ergänzten Auflage 1990, 2014, 565 Seiten, 65 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5500-2

Band 9:

Statistische Physik Teil 2

unveränderter Nachdruck der 4., berichtigten Auflage 1992, 2020, 404 Seiten, 18 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5656-6

Band 10:

Physikalische Kinetik

unveränderter Nachdruck der 2. Auflage 1990, 2020, 480 Seiten, 35 Abbildungen, gebunden, ISBN 978-3-8085-5624-5

Das **Gesamtwerk** ist auch zum günstigen Satzpreis erhältlich:

L. D. Landau · E. M. Lifschitz, **Lehrbuch der Theoretischen Physik**

ISBN 978-3-8085-5588-0



Edition
Harri 
Deutsch 

L. D. Landau • L. P. Pitajewski

Statistische Physik Teil 2

Theorie der kondensierten Materie

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56566

Titel der Originalausgabe:

Л. Д. Ландау и Л. П. Питаевский
Статистическая физика. Часть 2.

Erschienen im Verlag NAUKA, Moskau 1978

In deutscher Sprache herausgegeben von Prof. Dr. habil. Paul Ziesche, Dresden (Reihe)
und Prof. Dr. sc. Helmut Eschrig, Dresden (Band).

Unveränderter Nachdruck der 4., berichtigten Auflage 1992, 2020
Druck 5 4 3

ISBN 978-3-8085-5656-6

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2020 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlaggestaltung: Medienwerkstatt Dreimaster / www.3master.de, 63546 Hammersbach
Druck: Totem, 88–100 Inowroclaw, Poland

VORWORT DER HERAUSGEBER ZUR DEUTSCHEN AUSGABE

Im Vorwort zur dritten russischen Auflage des fünften Bandes dieser zehnbändigen Gesamtdarstellung der modernen theoretischen Physik wird zur Neugliederung der Statistischen Physik in Teil 1 (Band V) und Teil 2 (Band IX) folgendes gesagt: „Im neunten Band wird eine detaillierte Darstellung der Methode der GREENSchen Funktionen und der Diagramm-Technik gegeben, die die Entwicklung der statistischen Physik während der letzten zwanzig Jahre wesentlich bestimmten. Die Abtrennung dieser (und auch einer Reihe anderer) Fragen wird nicht nur dadurch diktiert, daß ein Einbeziehen in den fünften Band zu einer übermäßigen Ausdehnung seines Umfangs und zu einer wesentlichen Änderung seines ganzen Charakters führen würde. Es handelt sich auch darum, daß diese Fragen ihrer Natur nach auch in einem starken Maße mit der Hydrodynamik und der makroskopischen Elektrodynamik zusammenhängen (es ist z. B. sinnvoll, sich bei der Behandlung der mikroskopischen Theorie der Supraleitfähigkeit auf die schon bekannte makroskopische Theorie dieser Erscheinung zu stützen). Aus diesem Grunde soll das neue Buch seinen Platz in der Reihenfolge der Bände dieses Lehrbuches nach der Mechanik und Elektrodynamik der Kontinua finden.“

Der gesamten Darstellung in diesem Band liegt die LANDAU-Theorie der Quantenflüssigkeiten als Ausgangspunkt und Rahmen zugrunde; solche speziellen Modelle wie wechselwirkungsfreie Quantengase werden lediglich zur Illustration der allgemeinen Theorie herangezogen. Immer wieder beeindruckt, wie es den Autoren — so auch in diesem Band — gelingt, den Bogen von der allgemeinen Theorie über die Behandlung bekannter Beispiele bis zu modernen Anwendungen zu spannen und gegenüber dem Mathematisch-Formalen das Physikalisch-Anschauliche deutlich hervortreten zu lassen. Die Vielfalt der behandelten Probleme aus der Quantentheorie der kondensierten Materie sowie Gründlichkeit und Originalität ihrer Darstellung machen dieses Werk so wertvoll.

Herrn Prof. E. M. LIFSCHITZ gebührt unser herzlichster Dank für seine freundliche Unterstützung bei der Vorbereitung der deutschen Ausgabe. Die Übersetzung wurde in bewährter Weise von Herrn Dr. E. JÄGER besorgt. Beim Korrekturlesen leistete Herr Dr. M. HIETSCHOLD wertvolle Hilfe.

Dresden, im September 1979

P. ZIESCHE, H. ESCHRIG

VORWORT ZUR RUSSISCHEN AUFLAGE

Wenn man den Inhalt des vorliegenden neunten Bandes des Lehrbuches der Theoretischen Physik kurz charakterisieren soll, dann kann man sagen, daß er der Quantentheorie des kondensierten Zustandes der Materie gewidmet ist. Er beginnt mit einer detaillierten Darstellung der Theorie der Quantenflüssigkeiten, sowohl der FERMI- als auch der BOSE-Flüssigkeit. Diese Theorie, die L. D. LANDAU unmittelbar nach den experimentellen Entdeckungen von P. L. KAPITZA schuf, stellt gegenwärtig einen selbständigen Zweig der theoretischen Physik dar. Seine Wichtigkeit ist nicht so sehr durch die interessanten Erscheinungen bestimmt, die in den flüssigen Isotopen des Heliums ablaufen, als vielmehr dadurch, daß die Vorstellungen und Begriffsbildungen der Quantenflüssigkeit und ihres Anregungsspektrums die Grundlage für die quantentheoretische Beschreibung makroskopischer Körper bilden.

Zum tieferen Verständnis der Eigenschaften von Metallen muß man zum Beispiel die Elektronen in den Metallen als eine FERMI-Flüssigkeit betrachten. Die Eigenschaften der Elektronenflüssigkeit werden aber durch die Existenz des Kristallgitters verkompliziert, und die vorläufige Untersuchung des einfacheren Falles einer homogenen und isotropen Flüssigkeit ist ein notwendiger Schritt beim Aufbau der Theorie. Genauso versteht man die Supraleitfähigkeit der Metalle, die man als Superfluidität der Elektronenflüssigkeit betrachten kann, kaum ohne vorherige Kenntnisse der einfacheren Theorie der Superfluidität einer BOSE-Flüssigkeit.

Ein nicht wegzudenkender Bestandteil des mathematischen Apparates der modernen statistischen Physik ist der Apparat der GREENSchen Funktionen. Das hängt keinesfalls nur mit den rechnerischen Bequemlichkeiten zusammen, die die Diagramm-Technik zur Berechnung der GREENSchen Funktionen bietet. Es geht vielmehr darum, daß die GREENSchen Funktionen unmittelbar das Spektrum der Elementaranregungen eines Körpers bestimmen und deshalb gerade die Sprache bilden, in der man die Eigenschaften dieser Anregungen am natürlichsten beschreiben kann. Deshalb wird in dem vorliegenden Band den methodischen Fragen — der Theorie der GREENSchen Funktionen makroskopischer Körper — besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Obwohl die Grundideen der Methode für alle Systeme ein und dieselben sind, ist die konkrete Form der Diagramm-Technik für die verschiedenen Fälle unterschiedlich. Es ist in diesem Zusammenhang natürlich, daß diese Methoden am Beispiel der isotropen Quantenflüssigkeiten entwickelt werden, wo sich das Wesen der Methode in reiner Form zeigt, ohne Komplikationen, die durch räumliche Inhomogenitäten, durch die Existenz von mehreren Teilchensorten usw. hineingetragen werden.

Aus analogen Gründen stellen wir die mikroskopische Theorie der Supraleitfähigkeit an dem einfachen Modell des isotropen FERMI-Gases mit schwacher Wechselwirkung dar und sehen von den erschwerenden Faktoren ab, die mit der Existenz des Kristallgitters und der COULOMB-Wechselwirkung verknüpft sind.

Im Zusammenhang mit den Kapiteln über die Elektronen in einem Kristallgitter und über die Theorie des Magnetismus betonen wir noch einmal, daß das vorliegende Buch ein Teil der Lehrbuchreihe der Theoretischen Physik ist und keinesfalls dazu gedacht ist, ein Lehrbuch der Festkörpertheorie zu ersetzen. In Übereinstimmung damit werden hier nur Fragen von allgemeinem Charakter betrachtet und nicht solche, die die Benutzung konkreter experimenteller Fakten erfordern. Desgleichen werden solche Fragen nicht berührt, die sich mit Rechenmethoden ohne klare theoretische Basis befassen. Wir erinnern auch daran, daß in diesem Band die kinetischen Eigenschaften von Festkörpern ausgelassen sind, wir wollen sie in dem folgenden, abschließenden Band der Lehrbuchreihe betrachten.

Schließlich werden in diesem Buch auch die Theorie der elektromagnetischen Fluktuationen in materiellen Medien und die Theorie der hydrodynamischen Fluktuationen behandelt. Die zuerst genannte war früher im achten Band enthalten. Daß sie nun in den vorliegenden Band übernommen wurde, hängt mit der Notwendigkeit zusammen, die GREENSchen Funktionen anzuwenden, dadurch kann man der ganzen Theorie eine einfachere und für die Anwendungen zweckmäßigere Form geben. Außerdem ist es natürlich, die elektromagnetischen und die hydrodynamischen Fluktuationen in einem Band zu betrachten.

L. D. LANDAU wirkte selbst nicht mehr als Autor dieses Buches mit. Aber der Leser wird leicht bemerken, wie oft sein Name im Text des Buches auftaucht; ein wesentlicher Teil der hier dargestellten Resultate stammt von ihm persönlich oder entspringt der Zusammenarbeit mit seinen Schülern. Der langjährige Umgang mit ihm gibt uns Anlaß zu hoffen, daß es uns gelang, seinen Standpunkt zu diesen Fragen richtig wiederzugeben — natürlich unter Berücksichtigung des Neuen, das während der letzten 15 Jahre hinzugefügt worden ist, nachdem sein Schaffen auf so tragische Weise unterbrochen wurde.

Wir möchten hier A. F. ANDREJEW, I. E. DSJALOSCHINSKI und I. M. LIFSCHITZ für die ständige Diskussion der in diesem Buch betrachteten Fragen danken. Großen Nutzen zogen wir auch aus dem bekannten Buch von A. A. ABRIKOSOW, L. P. GORKOW und I. E. DSJALOSCHINSKI¹⁾ — einem der ersten Bücher in der physikalischen Literatur, welche die neuen Methoden der statistischen Physik behandeln. Schließlich sind wir L. P. GORKOW und JU. L. KLIMONTOWITSCH zu Dank verpflichtet, die das Buch im Manuskript gelesen und eine Reihe von Hinweisen gegeben haben.

Moskau, April 1977

E. M. LIFSCHITZ, L. P. PITAJEWSKI

¹⁾ A. A. ABRIKOSOW, L. P. GORKOW und I. E. DSJALOSCHINSKI, *Metody kwantowej teorii polja w statistitscheskoj fizike*, Moskau 1962 — *Bem. d. Herausg.*

INHALTSVERZEICHNIS

Einige Bezeichnungen	XIII
Kapitel I. Die normale FERMI-Flüssigkeit	1
§ 1. Elementaranregungen in einer FERMI-Flüssigkeit	1
§ 2. Die Wechselwirkung der Quasiteilchen	7
§ 3. Die magnetische Suszeptibilität der FERMI-Flüssigkeit	12
§ 4. Der nullte Schall	13
§ 5. Spinwellen in der FERMI-Flüssigkeit	19
§ 6. Das entartete, fast ideale FERMI-Gas mit Abstoßung zwischen den Teilchen	21
Kapitel II. GREENSche Funktionen eines FERMI-Systems bei $T = 0$	29
§ 7. Die GREENSche Funktion eines makroskopischen Systems	29
§ 8. Die Bestimmung des Energiespektrums mit Hilfe der GREENSchen Funktion	34
§ 9. Die GREENSche Funktion eines idealen FERMI-Gases	39
§ 10. Die Verteilung der Teilchen einer FERMI-Flüssigkeit bezüglich der Impulse	42
§ 11. Die Berechnung der thermodynamischen Größen aus der GREENSchen Funktion	43
§ 12. ψ -Operatoren in der Wechselwirkungsdarstellung	44
§ 13. Die Diagrammtechnik für FERMI-Systeme	47
§ 14. Die Selbstenergie-Funktion	55
§ 15. Die GREENSche Zweiteilchenfunktion	57
§ 16. Zusammenhang zwischen Vertexfunktion und Streuamplitude der Quasiteilchen	62
§ 17. Die Vertexfunktion bei kleinen Impulsübertragungen	64
§ 18. Zusammenhang zwischen der Vertexfunktion und der Wechselwirkungsfunktion der Quasiteilchen	70
§ 19. Identitäten für Ableitungen der GREENSchen Funktion	73
§ 20. Ableitung des Zusammenhangs zwischen Grenzimpuls und Dichte	77
§ 21. Die GREENSche Funktion eines fast idealen FERMI-Gases	79
Kapitel III. Die Superfluidität	86
§ 22. Die Elementaranregungen in einer BOSE-Flüssigkeit	86
§ 23. Die Superfluidität	89
§ 24. Phononen in einer Flüssigkeit	95
§ 25. Das entartete, fast ideale BOSE-Gas	99

§ 26. Die Wellenfunktion des Kondensats	104
§ 27. Die Temperaturabhängigkeit der Kondensatdichte	107
§ 28. Das Verhalten der superfluiden Dichte in der Nähe des λ -Punktes	110
§ 29. Quantisierte Wirbelfäden	112
§ 30. Ein Wirbelfaden in einem fast idealen BOSE-Gas	118
§ 31. GREENSCHE Funktionen einer BOSE-Flüssigkeit	120
§ 32. Die Diagrammtechnik für eine BOSE-Flüssigkeit	125
§ 33. Die Selbstenergie-Funktionen	128
§ 34. Der Zerfall von Quasiteilchen	132
§ 35. Die Eigenschaften des Spektrums in der Nähe seines Endpunktes	137
Kapitel IV. GREENSCHE Funktionen bei endlichen Temperaturen	142
§ 36. GREENSCHE Funktionen bei endlichen Temperaturen	142
§ 37. Temperaturabhängige GREENSCHE Funktionen	147
§ 38. Die Diagrammtechnik für temperaturabhängige GREENSCHE Funktionen ..	150
Kapitel V. Die Supraleitfähigkeit	154
§ 39. Das superfluide FERMI-Gas. Das Energiespektrum	154
§ 40. Das superfluide FERMI-Gas. Thermodynamische Eigenschaften	159
§ 41. GREENSCHE Funktionen des superfluiden FERMI-Gases	164
§ 42. Temperaturabhängige GREENSCHE Funktionen des superfluiden FERMI-Gases	170
§ 43. Die Supraleitfähigkeit der Metalle	172
§ 44. Der supraleitende Strom	173
§ 45. Die GINSBURG-LANDAU-Gleichungen	178
§ 46. Die Oberflächenspannung an der Grenze zwischen supraleitender und normaler Phase	185
§ 47. Zwei Arten von Supraleitern	190
§ 48. Die Struktur des gemischten Zustandes	194
§ 49. Die diamagnetische Suszeptibilität oberhalb des Übergangspunktes	202
§ 50. Der JOSEPHSON-Effekt	205
§ 51. Der Zusammenhang zwischen Strom und Magnetfeld in einem Supraleiter ..	209
§ 52. Die Eindringtiefe eines Magnetfeldes in einen Supraleiter	216
§ 53. Supraleitende Legierungen	217
§ 54. Der COOPER-Effekt bei von Null verschiedenen Bahndrehimpulsen eines Paares	220
Kapitel VI. Elektronen im Kristallgitter	225
§ 55. Ein Elektron im periodischen Feld	225
§ 56. Der Einfluß eines äußeren Feldes auf die Elektronenbewegung im Gitter ..	234
§ 57. Quasiklassische Trajektorien	238
§ 58. Quasiklassische Energieniveaus	242
§ 59. Der Tensor der effektiven Massen eines Elektrons im Gitter	245
§ 60. Die Symmetrie der Elektronenzustände im Gitter in einem Magnetfeld ...	250
§ 61. Das Elektronenspektrum normaler Metalle	254
§ 62. Die GREENSCHE Funktion der Elektronen im Metall	258

§ 63. Der DE HAAS-VAN ALPHEN-Effekt	262
§ 64. Die Elektron-Phonon-Wechselwirkung	269
§ 65. Der Einfluß der Elektron-Phonon-Wechselwirkung auf das Elektronenspektrum im Metall	272
§ 66. Das Elektronenspektrum fester Dielektrika	276
§ 67. Elektronen und Löcher in Halbleitern	279
§ 68. Das Elektronenspektrum in der Nähe eines Entartungspunktes	281
Kapitel VII. Der Magnetismus	287
§ 69. Die Bewegungsgleichung des magnetischen Momentes in einem Ferromagneten	287
§ 70. Magnonen in einem Ferromagneten. Das Spektrum	293
§ 71. Magnonen in einem Ferromagneten. Thermodynamische Größen	298
§ 72. Der Spin-HAMILTON-Operator	303
§ 73. Wechselwirkung der Magnonen	308
§ 74. Magnonen in einem Antiferromagneten	313
Kapitel VIII. Elektromagnetische Fluktuationen	317
§ 75. Die GREENSCHE Funktion eines Photons in einem Medium	317
§ 76. Fluktuationen des elektromagnetischen Feldes	322
§ 77. Elektromagnetische Fluktuationen in einem unendlich ausgedehnten Medium	324
§ 78. Stromfluktuationen in linearen Stromkreisen	330
§ 79. Die temperaturabhängige GREENSCHE Funktion eines Photons in einem Medium	331
§ 80. Der Spannungstensor der VAN DER WAALS-Kräfte	335
§ 81. Molekulare Wechselwirkungskräfte zwischen festen Körpern. Allgemeine Formel	342
§ 82. Molekulare Wechselwirkungskräfte zwischen festen Körpern. Grenzfälle ..	346
§ 83. Das asymptotische Verhalten der Korrelationsfunktion in einer Flüssigkeit ..	351
§ 84. Ein Operatorausdruck für die Dielektrizitätskonstante	354
§ 85. Das entartete Plasma	357
Kapitel IX. Hydrodynamische Fluktuationen	364
§ 86. Der dynamische Formfaktor einer Flüssigkeit	364
§ 87. Summenregeln für den Formfaktor	368
§ 88. Hydrodynamische Fluktuationen	373
§ 89. Hydrodynamische Fluktuationen in einem unendlich ausgedehnten Medium ..	377
§ 90. Operatorausdrücke für die kinetischen Koeffizienten	382
§ 91. Der dynamische Formfaktor der FERMI-Flüssigkeit	385
Sachverzeichnis	389

EINIGE BEZEICHNUNGEN

Vektorindizes werden durch lateinische Buchstaben i, k, \dots bezeichnet. Spinindizes werden durch griechische Buchstaben α, β, \dots bezeichnet. Über alle doppelt auftretende Indizes wird stillschweigend summiert.

„4-Vektoren“ (s. Fußnote auf S. 51) werden durch große Buchstaben X, P, \dots gekennzeichnet.

Das Volumenelement ist dV oder d^3x .

Die Grenze, wenn eine Größe von oben oder unten gegen Null strebt: $+0$ und -0 .

Operatoren werden durch Buchstaben mit einem Dach $\hat{}$ gekennzeichnet.

Der HAMILTON-Operator ist \hat{H} , $\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N}$. Der Störungsoperator ist \hat{V} , ψ -Operatoren in der SCHRÖDINGER-Darstellung sind $\hat{\psi}$, $\hat{\psi}^+$, in der HEISENBERG-Darstellung $\hat{\Psi}$, $\hat{\Psi}^+$, in der MATSUBARA-Darstellung $\hat{\Psi}^M$, $\hat{\Psi}^{M+}$.

Die GREENSchen Funktionen sind G , D . Die temperaturabhängigen GREENSchen Funktionen sind \mathcal{G} , \mathcal{D} .

Die thermodynamischen Größen werden wie im Band V bezeichnet, insbesondere: die Temperatur T , das Volumen V , der Druck P , das chemische Potential μ .

Die magnetische Feldstärke und die magnetische Induktion sind gegeben durch \mathbf{H} bzw. \mathbf{B} ; das äußere magnetische Feld ist \mathfrak{H} .

Das Zeichen \sim bedeutet größenordnungsmäßig gleich, und \propto bedeutet proportional.

Hinweise auf die Nummer der Paragraphen und der Formeln in anderen Bänden dieses Lehrbuches sind mit römischen Ziffern versehen: I – „Mechanik“ (1990); II – „Klassische Feldtheorie“ (1989); III – „Quantenmechanik“ (1990); IV – „Quantenelektrodynamik“ (1991); V – „Statistische Physik, Teil I“ (1991); VI – „Hydrodynamik“ (1991); VIII – „Elektrodynamik der Kontinua“ (1990).

Die in den Hinweisen genannten Paragraphen- und Formelnummern beziehen sich auf die angegebenen Auflagen und stimmen mit älteren Auflagen u. U. nicht überein.

1

DIE NORMALE FERMI-FLÜSSIGKEIT

§ 1. Elementaranregungen in einer FERMI-Flüssigkeit

Bei sehr tiefen Temperaturen, bei denen die DE BROGLIE-Wellenlänge, die der thermischen Bewegung der Atome in einer Flüssigkeit entspricht, mit den zwischenatomaren Abständen vergleichbar wird, sind die makroskopischen Eigenschaften der Flüssigkeit durch Quanteneffekte bestimmt. Die Theorie dieser Quanteneffekte ist von großem prinzipiellen Interesse, obwohl es in der Natur nur zwei Objekte dieser Art gibt, die Flüssigkeiten im buchstäblichen Sinne dieses Wortes sind; das sind die flüssigen Isotope des Heliums (He^3 und He^4) bei Temperaturen von etwa 1–2 K. Alle anderen Stoffe werden schon wesentlich früher fest, als daß die Quanteneffekte in ihnen eine entscheidende Rolle spielen könnten. Wir erinnern in diesem Zusammenhang daran, daß nach der klassischen Mechanik alle Körper am absoluten Temperaturnullpunkt fest sein sollten (s. V, § 64); Helium bleibt, weil die Wechselwirkung seiner Atome besonders schwach ist, flüssig bis zu Temperaturen, bei denen die Quanteneffekte ins Spiel kommen, worauf die Verfestigung schon nicht mehr einzutreten braucht.

Die Berechnung der thermodynamischen Größen eines makroskopischen Körpers erfordert es, daß man das Spektrum seiner Energieniveaus kennt. Im Falle eines Systems von stark wechselwirkenden Teilchen, wie es eine Quantenflüssigkeit ist, handelt es sich natürlich um die Niveaus, die den quantenmechanischen stationären Zuständen der Flüssigkeit als Ganzes entsprechen, und keinesfalls um die Zustände der einzelnen Atome. Bei der Berechnung der Zustandssumme im Gebiet hinreichend tiefer Temperaturen braucht man nur die schwach angeregten Energieniveaus der Flüssigkeit zu berücksichtigen — die Niveaus, die nicht allzu hoch über dem Grundzustand liegen.

Der folgende Umstand ist von entscheidender Bedeutung für die ganze Theorie. Jeder schwach angeregte Zustand eines makroskopischen Körpers kann in der Quantenmechanik als Gesamtheit von einzelnen *Elementaranregungen* betrachtet werden. Diese Elementaranregungen verhalten sich wie gewisse *Quasiteilchen*, die sich in dem von dem Körper eingenommenen Volumen bewegen und bestimmte Energien ε und Impulse \mathbf{p} besitzen. Die Form der Abhängigkeit $\varepsilon(\mathbf{p})$ (oder, wie man sagt, das *Dispersionsgesetz* der Elementaranregungen) ist eine wichtige Charakteristik des Energiespektrums des Körpers. Wir betonen noch einmal, daß der Begriff der Elementaranregungen als eine Methode zur quantenmechanischen Beschreibung der kollektiven Bewegung der Atome eines Körpers entsteht, und die Quasiteilchen keinesfalls mit einzelnen Atomen oder Molekülen identifiziert werden können.

Es gibt unterschiedliche Typen von Energiespektren, die die Quantenflüssigkeiten im Prinzip haben können. In Abhängigkeit von dem Typ des Spektrums wird die Flüssigkeit auch vollkommen unterschiedliche makroskopische Eigenschaften haben. Wir beginnen mit der Behandlung der Flüssigkeit mit einem Spektrum vom FERMI-Typ. Die

Theorie dieser FERMI-Flüssigkeit wurde von L. D. LANDAU (1956—1958) geschaffen; von ihm stammen die Resultate, die in den §§ 1—4 dargestellt sind.¹⁾

Das Energiespektrum einer Quantenflüssigkeit vom FERMI-Typ wird im gewissen Sinne analog zu dem Spektrum des idealen FERMI-Gases (aus Teilchen mit Spin $1/2$) konstruiert. Dem Grundzustand des letzteren entspricht die Besetzung aller Teilchenzustände innerhalb der FERMI-Kugel, einer Kugel im Impulsraum mit dem Radius p_F , der mit der Dichte des Gases N/V (der Zahl der Teilchen pro Volumeneinheit) durch die Formel

$$\frac{N}{V} = 2 \frac{4\pi p_F^3}{3(2\pi\hbar)^3} = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \quad (1,1)$$

zusammenhängt (s. V, § 57). Die angeregten Zustände des Gases entstehen, wenn Teilchen aus den Zuständen der besetzten Kugel in irgendwelche Zustände mit $p > p_F$ übergehen.

In einer Flüssigkeit gibt es selbstverständlich keine Quantenzustände für einzelne Teilchen. Der Ausgangspunkt für die Konstruktion des Spektrums einer FERMI-Flüssigkeit besteht aber in der Behauptung, daß die Klassifizierung der Energieniveaus un geändert bleibt, wenn die Wechselwirkung zwischen den Atomen allmählich „eingeschaltet“ wird, d. h. bei dem Übergang vom Gas zur Flüssigkeit. In dieser Klassifikation geht die Rolle der Gasteilchen auf die Elementaranregungen (Quasiteilchen) über, deren Zahl mit der Zahl der Atome übereinstimmt und die der FERMI-Statistik unterworfen sind.

Wir wollen gleich betonen, daß ein Spektrum dieses Typs offensichtlich nur eine Flüssigkeit aus Teilchen mit halbzahligem Spin haben kann — der Zustand eines Systems aus Bosonen (Teilchen mit ganzzahligem Spin) kann nicht mit Hilfe von Quasiteilchen beschrieben werden, die der FERMI-Statistik genügen. Gleichzeitig muß man auch betonen, daß ein Spektrum dieses Typs keine universelle Eigenschaft aller solcher Flüssigkeiten sein kann. Der Typ des Spektrums hängt auch von dem konkreten Charakter der Wechselwirkung zwischen den Atomen ab. Eine einfache Überlegung macht diesen Umstand deutlich: wenn die Wechselwirkung dergestalt ist, daß unter ihrer Wirkung die Atome danach streben, sich in Paaren zu assoziieren, dann würden wir in der Grenze eine molekulare Flüssigkeit erhalten, die aus Teilchen (Molekülen) mit ganzzahligem Spin besteht, für sie ist ein Spektrum des betrachteten FERMI-Typs selbstverständlich unmöglich.

Jedes Quasiteilchen besitzt einen bestimmten Impuls \mathbf{p} (wir werden noch auf die Frage zurückkommen, wieso diese Behauptung richtig ist). $n(\mathbf{p})$ sei die Verteilungsfunktion der Quasiteilchen bezüglich der Impulse. Sie sei durch die Bedingung

$$\int n \, d\tau = \frac{N}{V}, \quad d\tau = \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

normiert (diese Bedingung wird unten noch konkretisiert werden). Das oben erwähnte Klassifizierungsprinzip besteht in der Annahme, daß die Vorgabe dieser Funktion eindeutig die Energie E der Flüssigkeit bestimmt und daß der Grundzustand einer Verteilungsfunktion entspricht, in der alle Zustände innerhalb der FERMI-Kugel mit dem Ra-

¹⁾ Vorgreifend möchten wir zur Vermeidung von Mißverständnissen sofort konkretisieren, daß es sich um die nicht superfluide (oder, wie man auch sagt, die *normale*) FERMI-Flüssigkeit handelt. Von diesem Typ ist das flüssige Isotop He³ (mit dem Vorbehalt, der in der Fußnote 3 auf S. 223 gemacht wird).

dies p_F besetzt sind. Dieser Radius hängt mit der Dichte der Flüssigkeit über genau die gleiche Formel (1,1) wie im Falle des idealen Gases zusammen.

Es ist wichtig zu betonen, daß die Gesamtenergie E der Flüssigkeit sich keinesfalls auf die Summe der Energien ε der Quasiteilchen reduziert. Mit anderen Worten, E ist ein Funktional der Verteilungsfunktion, das sich nicht auf das Integral $\int n\varepsilon d\tau$ reduziert (wie das für ein ideales Gas gilt, wo die Quasiteilchen mit den echten Teilchen zusammenfallen und nicht miteinander wechselwirken). Weil der primäre Begriff gerade die Energie E ist, so entsteht das Problem, die Energie der Quasiteilchen unter Berücksichtigung ihrer Wechselwirkung zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die Änderung von E bei einer unendlich kleinen Änderung der Verteilungsfunktion. Sie muß offensichtlich durch ein Integral von einem Ausdruck gegeben sein, der linear in der Variation δn ist, d. h. die Form

$$\frac{\delta E}{V} = \int \varepsilon(\mathbf{p}) \delta n d\tau$$

hat. Die Größe ε ist die Variationsableitung der Energie E nach der Verteilungsfunktion. Sie entspricht der Änderung der Energie des Systems, wenn man ein Quasiteilchen mit dem Impuls \mathbf{p} hinzufügt, und gerade diese Größe spielt die Rolle der HAMILTON-Funktion des Quasiteilchens im Feld der anderen Teilchen. Sie ist ebenfalls ein Funktional der Verteilungsfunktion, d. h. die Form der Funktion $\varepsilon(\mathbf{p})$ ist durch die Verteilung aller Teilchen in der Flüssigkeit bestimmt.

Wir merken in diesem Zusammenhang an, daß man die Elementaranregung in dem betrachteten Typ des Spektrums im gewissen Sinne als Atom im selbstkonsistenten Feld der anderen Atome behandeln kann. Diese Selbstkonsistenz darf man aber nicht in dem in der Quantenmechanik üblichen Sinne verstehen. Sie hat hier einen tieferen Charakter; im HAMILTON-Operator des Atoms wird nicht nur der Einfluß der umgebenden Teilchen auf die potentielle Energie betrachtet, sondern es wird auch die Abhängigkeit des Operators der kinetischen Energie vom Impulsoperator geändert.

Bis jetzt haben wir von der Existenz eines Spins der Quasiteilchen abgesehen. Weil der Spin eine quantenmechanische Größe ist, kann er klassisch nicht betrachtet werden. Aus diesem Grunde müssen wir die Verteilungsfunktion als statistische Matrix bezüglich des Spins betrachten. Die Energie ε einer Elementaranregung ist im allgemeinen nicht nur eine Funktion des Impulses, sondern auch ein Operator bezüglich der Spinvariablen, der durch den Spinoperator \hat{s} des Quasiteilchens ausgedrückt werden kann. In einer homogenen und isotropen Flüssigkeit (die sich weder in einem Magnetfeld befindet noch ferromagnetisch ist) kann der Operator \hat{s} in die skalare Funktion ε nur in Form der Skalare \hat{s}^2 oder $(\hat{s}\mathbf{p})^2$ eingehen; die erste Potenz des Produktes $\hat{s}\mathbf{p}$ ist nicht erlaubt, weil sie ein Pseudoskalar ist, da der Spinvektor ein axialer Vektor ist. Es ist $\hat{s}^2 = s(s+1)$, und für Spin $1/2$ führt ebenso $(\hat{s}\mathbf{p})^2 = p^2/4$ auf eine von \hat{s} unabhängige Konstante. In diesem Falle hängt also die Energie des Quasiteilchens überhaupt nicht vom Spinoperator ab, d. h., alle Energieniveaus der Quasiteilchen sind zweifach entartet.

Im Grunde genommen ist die Annahme der Existenz eines Spins für ein Quasiteilchen ein Ausdruck der Tatsache, daß diese Entartung vorhanden ist. In diesem Sinne kann man behaupten, daß der Spin der Quasiteilchen im gegebenen Typ des Spektrums immer gleich $1/2$ ist, unabhängig davon, welchen Spin die echten Flüssigkeitsteilchen haben. Denn bei einem beliebigen, von $1/2$ verschiedenen Spin s würden die Glieder der Form $(\hat{s}\mathbf{p})^2$ zu einer Aufspaltung der $(2s+1)$ -fach entarteten Niveaus in $(2s+1)/2$ Niveaus

mit zweifacher Entartung führen. Mit anderen Worten, es treten $(2s + 1)/2$ verschiedene Zweige der Funktion $\varepsilon(\mathbf{p})$ auf, von denen jeder „Quasiteilchen mit Spin $1/2$ “ entspricht.

Wie schon bemerkt wurde, wird die Verteilungsfunktion bei Berücksichtigung des Spins der Quasiteilchen eine Matrix oder ein Operator $\hat{n}(\mathbf{p})$ bezüglich der Spinvariablen. Dieser Operator wird in expliziter Form als hermitesche Dichtematrix $n_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ geschrieben, wobei α, β Spinindizes sind, die die beiden Werte $\pm 1/2$ annehmen können. Die diagonalen Matricelemente bestimmen die Zahl der Quasiteilchen in bestimmten Spinzuständen. Deshalb muß die Normierungsbedingung für die Verteilungsfunktion der Quasiteilchen jetzt in der Form

$$\text{Sp} \int \hat{n} \, d\tau \equiv \int n_{\alpha\alpha} \, d\tau = \frac{N}{V}, \quad d\tau = \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \quad (1,2)$$

geschrieben werden (das Symbol Sp bedeutet, daß die Spur der Matrix bezüglich der Spinindizes zu nehmen ist).¹⁾

Ein Operator — eine Matrix bezüglich der Spinvariablen — ist im allgemeinen auch die Energie des Quasiteilchens $\hat{\varepsilon}$. Ihre Definition muß man als

$$\frac{\delta E}{V} = \text{Sp} \int \hat{\varepsilon} \, \delta \hat{n} \, d\tau \equiv \int \varepsilon_{\alpha\beta} \, \delta n_{\beta\alpha} \, d\tau \quad (1,3)$$

schreiben.

Wenn die Spinabhängigkeit der Verteilungsfunktion und der Energie fehlt, d. h. wenn sich $n_{\alpha\beta}$ und $\varepsilon_{\alpha\beta}$ auf die Einheitsmatrix reduzieren:

$$n_{\alpha\beta} = n \, \delta_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon \, \delta_{\alpha\beta}, \quad (1,4)$$

dann führt die Spur in (1,2–3) einfach auf eine Multiplikation mit 2:

$$2 \int n \, d\tau = \frac{N}{V}, \quad \frac{\delta E}{V} = 2 \int \varepsilon \, \delta n \, d\tau. \quad (1,5)$$

Es ist leicht zu sehen, daß im statistischen Gleichgewicht die Verteilungsfunktion der Quasiteilchen die Form einer FERMI-Verteilung hat, wobei die Rolle der Energie die nach (1,3) definierte Größe $\hat{\varepsilon}$ spielt. Denn weil die Klassifizierungseigenschaften der Energieniveaus der Flüssigkeit mit denen eines idealen FERMI-Gases übereinstimmen, wird die Entropie S der Flüssigkeit durch den gleichen kombinatorischen Ausdruck

$$\frac{S}{V} = -\text{Sp} \int \{ \hat{n} \ln \hat{n} - (1 - \hat{n}) \ln (1 - \hat{n}) \} \, d\tau \quad (1,6)$$

wie im Falle des Gases bestimmt (s. V, § 55). Wenn wir diesen Ausdruck unter der zusätzlichen Bedingung variieren, daß die Gesamtzahl der Teilchen und die Gesamtenergie konstant bleiben sollen,

$$\frac{\delta N}{V} = \text{Sp} \int \delta \hat{n} \, d\tau = 0, \quad \frac{\delta E}{V} = \text{Sp} \int \hat{\varepsilon} \, \delta \hat{n} \, d\tau = 0,$$

erhalten wir die gesuchte Verteilung

$$\hat{n} = [e^{(\hat{\varepsilon} - \mu)/T} + 1]^{-1}. \quad (1,7)$$

¹⁾ Hier und überall unten wird über doppelt auftretende Indizes wie üblich summiert.

Dabei ist μ das chemische Potential der Flüssigkeit.

Wenn die Energie der Quasiteilchen nicht vom Spin abhängt, folgt aus der Formel (1,7) die gleiche Verknüpfung zwischen den Größen n und ε :

$$n = [e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1]^{-1}. \quad (1,8)$$

Bei der Temperatur $T = 0$ fällt das chemische Potential mit der Grenzenergie an der Oberfläche der FERMI-Kugel zusammen:

$$\mu |_{T=0} = \varepsilon_F \equiv \varepsilon(p_F). \quad (1,9)$$

Wir unterstreichen, daß ungeachtet der formalen Analogie des Ausdruckes (1,8) mit der üblichen FERMI-Verteilung beide nicht identisch sind: weil ε selbst ein Funktional von n ist, ist die Formel (1,8) streng genommen eine komplizierte implizite Definition von n .

Kehren wir zu der getroffenen Annahme zurück, daß jedem Quasiteilchen ein bestimmter Impuls zugeschrieben werden kann. Damit diese Annahme berechtigt ist, ist es erforderlich, daß die Unbestimmtheit des Impulses (die mit der Endlichkeit der freien Weglänge des Quasiteilchens zusammenhängt) nicht nur klein im Vergleich zu der Größe des Impulses selbst ist, sondern auch gegenüber der Breite Δp des „Aufweichungsgebietes“ der Verteilung — des Gebietes, in dem sie sich wesentlich von der Stufenfunktion

$$\theta(p) \equiv \theta(p) = \begin{cases} 1 & \text{bei } p < p_F \\ 0 & \text{bei } p > p_F \end{cases} \quad (1,10)$$

unterscheidet.¹⁾ Es ist leicht zu sehen, daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn die Verteilung $n(p)$ sich von (1,10) nur in einem kleinen Gebiet in der Nähe der Oberfläche der FERMI-Kugel unterscheidet. Denn wegen des PAULI-Prinzips können nur Quasiteilchen in dem Aufweichungsgebiet der Verteilung aneinander gestreut werden, wobei sie im Ergebnis der Streuung in freie Zustände in demselben Gebiet übergehen müssen. Deshalb ist die Stoßwahrscheinlichkeit proportional dem Quadrat der Breite dieses Gebietes. Dementsprechend ist auch die Unbestimmtheit der Energie und mit ihr auch die Unbestimmtheit des Impulses des Quasiteilchens proportional zu $(\Delta p)^2$. Hieraus folgt, daß bei hinreichend kleinem Δp die Unbestimmtheit des Impulses nicht nur klein im Vergleich zu p_F , sondern auch im Vergleich zu Δp ist.

Die dargestellte Methode ist also nur für solche angeregte Zustände der Flüssigkeit richtig, die durch eine Verteilungsfunktion für die Quasiteilchen beschrieben werden, welche sich von der Stufenfunktion nur in einem engen Gebiet in der Nähe der FERMI-Fläche unterscheidet. Insbesondere sind für Verteilungen im thermodynamischen Gleichgewicht nur hinreichend tiefe Temperaturen zulässig. Die Breite (bezüglich der Energie) des Aufweichungsgebietes der Gleichgewichtsverteilung ist $\sim T$. Die quantentheoretische Unbestimmtheit der Energie des Quasiteilchens, die mit den Stößen zusammenhängt, ist von der Größenordnung \hbar/τ , wobei τ die mittlere Flugzeit zwischen zwei Stößen des Quasiteilchens ist. Deshalb lautet die Bedingung, unter der die Theorie anwendbar ist:

$$\hbar/\tau \ll T. \quad (1,11)$$

¹⁾ Wir merken für das Weitere an, daß die Ableitung

$$\theta'(p) = -\delta(p - p_F)$$

ist. Denn beide Seiten dieser Gleichung ergeben das gleiche Resultat (eins) bei der Integration über ein beliebiges, $p = p_F$ enthaltendes Intervall.

Nach dem oben Gesagten ist dabei die Zeit τ umgekehrt proportional dem Quadrat der Breite des Aufweichungsgebietes, d. h.

$$\tau \propto T^{-2},$$

so daß (1,11) bei $T \rightarrow 0$ offenbar erfüllt ist. Für eine Flüssigkeit, in der die Wechselwirkung zwischen den Teilchen nicht schwach ist, stimmen alle Energieparameter größenordnungsmäßig mit der Grenzenergie ε_F überein; in diesem Sinne ist die Bedingung (1,11) äquivalent der Bedingung $T \ll |\varepsilon_F|$.¹⁾

Für Verteilungen, die der stufenförmigen ähnlich sind (der Verteilung bei $T = 0$), kann man in erster Näherung das Funktional ε durch seinen Wert ersetzen, der für $n(\mathbf{p}) = \theta(p)$ berechnet wird. Dann wird ε eine bestimmte Funktion des Impulsbetrages, und die Formel (1,7) wird zu einer gewöhnlichen FERMI-Verteilung.

Dabei kann man in der Nähe der Oberfläche der FERMI-Kugel, wo die Funktion $\varepsilon(\mathbf{p})$ einen unmittelbaren physikalischen Sinn hat, diese Funktion nach Potenzen der Differenz $p - p_F$ entwickeln. Wir finden

$$\varepsilon - \varepsilon_F \approx v_F(p - p_F). \quad (1,12)$$

Dabei ist

$$v_F = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right|_{p=p_F} \quad (1,13)$$

die „Geschwindigkeit“ der Quasiteilchen auf der FERMI-Oberfläche. In einem idealen FERMI-Gas, wo die Quasiteilchen mit den echten Teilchen identisch sind, haben wir $\varepsilon = p^2/2m$, so daß $v_F = p_F/m$ ist. In Analogie dazu kann man für die FERMI-Flüssigkeit die Größe

$$m^* = p_F/v_F \quad (1,14)$$

einführen und sie *effektive Masse* eines Quasiteilchens nennen; diese Größe ist positiv (s. Ende des § 2).

In den Bezeichnungen der so eingeführten Größen kann man die Bedingung, unter der die Theorie angewendet werden darf, als $T \ll v_F p_F$ schreiben, wobei einen realen Sinn nur die Quasiteilchen mit Impulsen p haben, für die $|p - p_F| \ll p_F$ ist. Wir unterstreichen diesen letzten Umstand noch einmal und bemerken, daß er insbesondere der Beziehung (1,1) zwischen p_F und der Flüssigkeitsdichte einen nichttrivialen Charakter verleiht, weil ihre anschauliche Ableitung (für das FERMI-Gas) auf der Vorstellung beruht, daß sich die Teilchen in Zuständen befinden, die die ganze FERMI-Kugel ausfüllen und nicht nur die Umgebung ihrer Oberfläche.²⁾

Die effektive Masse bestimmt speziell die Entropie S und die Wärmekapazität C der Flüssigkeit bei tiefen Temperaturen. Sie werden durch die gleichen Formeln gegeben wie auch für ein ideales Gas (V, § 58), man braucht in ihnen nur die Teilchenmasse m durch die effektive Masse m^* zu ersetzen:

$$S = C = V\gamma T, \quad \gamma = \frac{m^* p_F}{3\hbar^3} = \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} \frac{m^*}{\hbar^2} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} \quad (1,15)$$

¹⁾ Für flüssiges He³ ist aber, wie das Experiment zeigt, das Gebiet für die quantitative Anwendung der Theorie praktisch begrenzt durch Temperaturen $T \lesssim 0,1$ K (während $|\varepsilon_F| \approx 2,5$ K ist).

²⁾ Der Beweis der Beziehung (1,1) erfordert die Anwendung von komplizierteren mathematischen Methoden, er wird später im § 20 gegeben werden.