

Tabelle 6.2 Differenzierungsregeln (s. S. 450)

| Regel | Formel für die Ableitung |
|------------------------------------|--|
| Konstantenregel | $c' = 0 \quad (c \text{ const})$ |
| Faktorregel | $(cu)' = cu' \quad (c \text{ const})$ |
| Summenregel | $(u \pm v)' = u' \pm v'$ |
| Produktregel für zwei Funktionen | $(uv)' = u'v + uv'$ |
| Produktregel für n Funktionen | $(u_1 u_2 \cdots u_n)' = \sum_{i=1}^n u_1 \cdots u_i' \cdots u_n$ |
| Quotientenregel | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$ |
| Kettenregel für zwei Funktionen | $y = u(v(x)): \quad y' = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$ |
| Kettenregel für drei Funktionen | $y = u(v(w(x))): \quad y' = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dw} \frac{dw}{dx}$ |
| Potenzregel | $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u' \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$ speziell: $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (u \neq 0)$ |
| Logarithmische Differenziation | $\frac{d(\ln y(x))}{dx} = \frac{1}{y} y' \implies y' = y \frac{d(\ln y)}{dx}$ speziell: $(u^v)' = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right) \quad (u > 0)$ |
| Differenziation der Umkehrfunktion | φ inverse Funktion zu f , d. h. $y = f(x) \iff x = \varphi(y)$: $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$ oder $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ |
| Implizite Differenziation | $F(x, y) = 0: F_x + F_y y' = 0$ oder $y' = -\frac{F_x}{F_y} \quad \left(F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, F_y = \frac{\partial F}{\partial y}; F_y \neq 0 \right)$ |
| Ableitung in Parameterdarstellung | $x = x(t), y = y(t)$ (t Parameter): $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt} \right)$ |
| Ableitung in Polarkoordinaten | $\rho = \rho(\varphi): \quad \begin{aligned} x &= \rho(\varphi) \cos \varphi \\ y &= \rho(\varphi) \sin \varphi \end{aligned}$ (Winkel φ als Parameter) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi}{\dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi} \quad \left(\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi} \right)$ |

| | | | |
|----|---|--------|---|
| | Inhaltsverzeichnis | III | ⇒ |
| | Tabellenverzeichnis | XXXVII | ⇒ |
| 1 | Arithmetik | 1 | ⇒ |
| 2 | Funktionen und ihre Darstellung | 49 | ⇒ |
| 3 | Geometrie | 132 | ⇒ |
| 4 | Lineare Algebra | 277 | ⇒ |
| 5 | Algebra und Diskrete Mathematik | 330 | ⇒ |
| 6 | Differenzialrechnung | 444 | ⇒ |
| 7 | Unendliche Reihen | 470 | ⇒ |
| 8 | Integralrechnung | 493 | ⇒ |
| 9 | Differenzialgleichungen | 553 | ⇒ |
| 10 | Variationsrechnung | 625 | ⇒ |
| 11 | Lineare Integralgleichungen | 636 | ⇒ |
| 12 | Funktionalanalysis | 669 | ⇒ |
| 13 | Vektoranalysis und Feldtheorie | 716 | ⇒ |
| 14 | Funktionentheorie | 745 | ⇒ |
| 15 | Integraltransformationen | 781 | ⇒ |
| 16 | Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik | 819 | ⇒ |
| 17 | Dynamische Systeme und Chaos | 871 | ⇒ |
| 18 | Optimierung | 923 | ⇒ |
| 19 | Numerische Mathematik | 964 | ⇒ |
| 20 | Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica | 1040 | ⇒ |
| 21 | Tabellen | 1071 | ⇒ |
| 22 | Literatur | 1160 | ⇒ |
| | Stichwortverzeichnis | 1177 | ⇒ |



Edition
Harri 
Deutsch 

Taschenbuch der Mathematik

von

I. N. Bronstein

K. A. Semendjajew

G. Musiol

H. Mühlig

11., aktualisierte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorf Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56702

Im Auftrag des Verlages Harri Deutsch erarbeitete und erweiterte Lizenzausgabe der bis 1977 erschienenen russischen Originalausgabe:

I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik für Ingenieure und Studenten

©FIZMATLIT, Moskau

11., aktualisierte Auflage 2020

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5792-1

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

© 2020 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten

<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: Prof. Dr. G. Musiol, 01127 Dresden

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: Legatoria Editoriale Giovanni Olivotto S.p.A., 36100 Vicenza, Italia

Vorwort

Auch im Internetzeitalter bleibt der BRONSTEIN das Nachschlagewerk der Mathematik.

Das Taschenbuch enthält einen Querschnitt der Mathematik, wie er sowohl für Studenten als auch für praktisch tätige Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker sowie für die einschlägigen Hochschullehrer erforderlich ist. Dem traditionellen Anliegen des Buches – vorgegeben von den Erstautoren I. N. BRONSTEIN und K. A. SEMENDJAJEW (1937) – folgend, stehen Anschaulichkeit und leichte Verständlichkeit für den Ingenieur und Naturwissenschaftler im Vordergrund. So sind für diesen Nutzerkreis Grenzen der Anwendbarkeit und Hinweise auf Besonderheiten bei Anwendungen wichtiger als möglichst allgemeine Formulierungen und strenge mathematische Beweise. Für weitergehende Fragen wird jeweils auf die Fachliteratur verwiesen.

Der Einsatz einer zweiten Farbe in der aktuellen 11. Auflage trägt den geänderten Lesegewohnheiten Rechnung, erhöht die Übersichtlichkeit und erleichtert so das schnelle Auffinden der gesuchten Information.

DeskTop Bronstein

Parallel zur gedruckten Ausgabe wird die digitale Version *DeskTop Bronstein* angeboten, eine plattformunabhängige vernetzte HTML-Struktur mit farbigen Abbildungen und einer auf dem erweiterten Index basierenden Suchfunktion.

Sie enthält zusätzlich zum kompletten Inhalt der gedruckten Ausgabe die beiden Kapitel „Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik“ und „Quantencomputer“ sowie weiterführende Methoden für partielle Differenzialgleichungen im Unterkapitel „Partielle Differenzialgleichungen“. Einen Unterschied gibt es beim Unterkapitel „LIE-Gruppen und LIE-Algebren“: die Version im Buch ist vorwiegend für Ingenieure gedacht, die im *DeskTop Bronstein* enthaltene Variante für Physiker.

Danksagung

Allen Lesern der deutschen und der zahlreichen fremdsprachigen Ausgaben des BRONSTEIN, allen Fachkollegen und Koautoren, die mit ihren Stellungnahmen, Bemerkungen, Anregungen und Zuarbeiten zu den vorangegangenen Auflagen des Buches die Überarbeitung erleichtert haben, möchten wir an dieser Stelle unseren herzlichen Dank zum Ausdruck bringen.

Ebenso gilt unser Dank dem Verlag Europa-Lehrmittel, in dem der BRONSTEIN seit der 9. Auflage erscheint und insbesondere Herrn Dipl.-Phys. Klaus Horn für die seit vielen Auflagen bewährte gute Zusammenarbeit.

Dresden, im Juni 2020

Herausgeber und Verlag

Koautoren

Einige Kapitel und Abschnitte sind in Zusammenarbeit mit Koautoren entstanden.

| Kapitel bzw. Abschnitt | Koautor |
|---|---|
| Sphärische Trigonometrie (3.4.1 bis 3.4.3.3) | Dr. H. NICKEL †, Dresden |
| Sphärische Kurven (3.4.3.4) | Prof. L. MARSOLEK, Berlin |
| Geometrische Transformationen, Koordinatentransformationen, Planare Projektionen (3.5.4, 3.5.5) | Dr. I. STEINERT, Düsseldorf |
| Quaternionen und Anwendungen (4.4), Logik (5.1), Mengenlehre (5.2), Klassische Algebraische Strukturen (5.3), Anwendungen von Gruppen (außer 5.3.4, 5.3.5.4 bis 5.3.5.6), Ringe und Körper (5.3.7), Vektorräume (5.3.8), BOOLEsche Algebra und Schaltalgebra (5.7), Universelle Algebra (5.6), Darstellung von Gruppen (5.3.4), weitere Anwendungen von Gruppen (5.3.5.4 bis 5.3.5.6) | PD Dr. S. BERNSTEIN, Freiberg (Sachsen) |
| LIE-Gruppen und LIE-Algebren (5.3.6) | Dr. J. BRUNNER, Dresden |
| Zahlentheorie, Kryptologie, Graphen (5.4, 5.5, 5.8) | Prof. Dr. R. REIF, Dresden |
| Fuzzy-Logik (5.9) | PD Dr. S. BERNSTEIN, Freiberg (Sachsen) |
| Wichtige Formeln für die Sphärischen BESSEL-Funktionen (9.1.2.5, 2, 5) | Prof. Dr. U. BAUMANN, Dresden |
| Statistische Interpretation der Wellenfunktion (9.2.4.4) | Prof. Dr. A. GRAUEL, Soest |
| Nichtlineare partielle Differenzialgleichungen: Solitonen, periodische Muster und Chaos (9.2.5) | Prof. Dr. P. ZIESCHE, Dresden |
| Nichtlineare SCHRÖDINGER-Gleichung, Lösungen (9.2.5.3, 2) | Prof. Dr. R. REIF, Dresden |
| Integralgleichungen (11) | Prof. Dr. P. ZIESCHE, Dresden |
| Funktionalanalysis (12) | Dr. J. BRAND, Dresden |
| Elliptische Funktionen (14.6) | Dr. I. STEINERT, Düsseldorf |
| Dynamische Systeme und Chaos (17) | Prof. Dr. M. WEBER, Dresden |
| Optimierung (18) | Dr. N. M. FLEISCHER †, Moskau |
| Nutzung von Computern: (19.8.1, 19.8.2), Interaktive Systeme: Mathematica (19.8.4.2), Maple (19.8.4.3), Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica (20) | Prof. Dr. V. REITMANN, St. Petersburg |
| Interaktive Systeme: Matlab (19.8.4.1) | Dr. I. STEINERT, Düsseldorf |
| Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica (20): Anpassung an Mathematica 10 | Prof. Dr. G. FLACH, Dresden |
| | PD Dr. B. MULANSKY, Clausthal |
| | Dr. J. Tóth, Budapest |

Zusätzliche Kapitel mit Koautoren im DeskTop Bronstein.

| | |
|---|--|
| LIE-Gruppen (5.3.5), LIE-Algebren (5.3.6) | Prof. Dr. R. REIF, Dresden |
| Nichtlineare Partielle Differenzialgleichungen: Inverse Streutheorie (Methoden in Analogie zur FOURIER-Methode) (9.2.6) | Dr. B. RUMPF, Dresden |
| Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (21) | Prof. Dr. A. BUCHLEITNER, PD Dr. M. TIERSCH, Dr. Th. WELLENS, Freiburg |
| Quantencomputer (22) | Prof. Dr. A. BUCHLEITNER, PD Dr. M. TIERSCH, Dr. Th. WELLENS, Freiburg |

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

XXXVII

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Arithmetik | 1 |
| 1.1 | Elementare Rechenregeln | 1 |
| 1.1.1 | Zahlen | 1 |
| 1.1.1.1 | Natürliche, ganze und rationale Zahlen | 1 |
| 1.1.1.2 | Irrationale und transzendente Zahlen | 1 |
| 1.1.1.3 | Reelle Zahlen | 2 |
| 1.1.1.4 | Kettenbrüche | 3 |
| 1.1.1.5 | Kommensurabilität | 4 |
| 1.1.2 | Beweismethoden | 5 |
| 1.1.2.1 | Direkter Beweis | 5 |
| 1.1.2.2 | Indirekter Beweis oder Beweis durch Widerspruch | 5 |
| 1.1.2.3 | Vollständige Induktion | 5 |
| 1.1.2.4 | Konstruktiver Beweis | 6 |
| 1.1.3 | Summen und Produkte | 6 |
| 1.1.3.1 | Summen | 6 |
| 1.1.3.2 | Produkte | 7 |
| 1.1.4 | Potenzen, Wurzeln, Logarithmen | 8 |
| 1.1.4.1 | Potenzen | 8 |
| 1.1.4.2 | Wurzeln | 8 |
| 1.1.4.3 | Logarithmen | 9 |
| 1.1.4.4 | Spezielle Logarithmen | 9 |
| 1.1.5 | Algebraische Ausdrücke | 10 |
| 1.1.5.1 | Definitionen | 10 |
| 1.1.5.2 | Einteilung der algebraischen Ausdrücke | 11 |
| 1.1.6 | Ganzrationale Ausdrücke | 11 |
| 1.1.6.1 | Darstellung in Form eines Polynoms | 11 |
| 1.1.6.2 | Zerlegung eines Polynoms in Faktoren | 11 |
| 1.1.6.3 | Spezielle Formeln | 12 |
| 1.1.6.4 | Binomischer Satz | 12 |
| 1.1.6.5 | Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Polynome | 14 |
| 1.1.7 | Gebrochenrationale Ausdrücke | 14 |
| 1.1.7.1 | Rückführung auf die einfachste Form | 14 |
| 1.1.7.2 | Bestimmung des ganzrationalen Anteils | 15 |
| 1.1.7.3 | Partialbruchzerlegung | 15 |
| 1.1.7.4 | Umformung von Proportionen | 17 |
| 1.1.8 | Irrationale Ausdrücke | 17 |
| 1.2 | Endliche Reihen | 19 |
| 1.2.1 | Definition der endlichen Reihe | 19 |
| 1.2.2 | Arithmetische Reihen | 19 |
| 1.2.3 | Geometrische Reihe | 20 |
| 1.2.4 | Spezielle endliche Reihen | 20 |
| 1.2.5 | Mittelwerte | 20 |
| 1.2.5.1 | Arithmetisches Mittel | 20 |
| 1.2.5.2 | Geometrisches Mittel | 21 |
| 1.2.5.3 | Harmonisches Mittel | 21 |
| 1.2.5.4 | Quadratisches Mittel | 21 |
| 1.2.5.5 | Vergleich der Mittelwerte für zwei positive Größen a und b | 21 |

| | | |
|----------|--|----|
| 1.3 | Finanzmathematik | 22 |
| 1.3.1 | Prozentrechnung | 22 |
| 1.3.1.1 | Prozent | 22 |
| 1.3.1.2 | Aufschlag | 22 |
| 1.3.1.3 | Abschlag oder Rabatt | 22 |
| 1.3.2 | Zinseszinsrechnung | 23 |
| 1.3.2.1 | Zinsen | 23 |
| 1.3.2.2 | Zinseszinsen | 23 |
| 1.3.3 | Tilgungsrechnung | 24 |
| 1.3.3.1 | Tilgung | 24 |
| 1.3.3.2 | Gleiche Tilgungsraten | 24 |
| 1.3.3.3 | Gleiche Annuitäten | 25 |
| 1.3.4 | Rentenrechnung | 25 |
| 1.3.4.1 | Rente | 25 |
| 1.3.4.2 | Nachschüssig konstante Rente | 26 |
| 1.3.4.3 | Kontostand nach n Rentenzahlungen | 26 |
| 1.3.5 | Abschreibungen | 27 |
| 1.3.5.1 | Abschreibungsarten | 27 |
| 1.3.5.2 | Lineare Abschreibung | 27 |
| 1.3.5.3 | Arithmetisch–degressive Abschreibung | 27 |
| 1.3.5.4 | Digitale Abschreibung | 28 |
| 1.3.5.5 | Geometrisch–degressive Abschreibung | 28 |
| 1.3.5.6 | Abschreibung mit verschiedenen Abschreibungsarten | 29 |
| 1.4 | Ungleichungen | 29 |
| 1.4.1 | Reine Ungleichungen | 29 |
| 1.4.1.1 | Definitionen | 29 |
| 1.4.1.2 | Eigenschaften der Ungleichungen vom Typ I und II | 30 |
| 1.4.2 | Spezielle Ungleichungen | 31 |
| 1.4.2.1 | Dreiecksungleichung für reelle Zahlen | 31 |
| 1.4.2.2 | Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen | 31 |
| 1.4.2.3 | Ungleichungen für den Absolutbetrag der Differenz zweier Zahlen | 31 |
| 1.4.2.4 | Ungleichung für das arithmetische und das geometrische Mittel | 31 |
| 1.4.2.5 | Ungleichung für das arithmetische und das quadratische Mittel | 31 |
| 1.4.2.6 | Ungleichungen für verschiedene Mittelwerte zweier reeller Zahlen | 31 |
| 1.4.2.7 | Bernoullische Ungleichung | 32 |
| 1.4.2.8 | Binomische Ungleichung | 32 |
| 1.4.2.9 | Cauchy–Schwarzsche Ungleichung | 32 |
| 1.4.2.10 | Tschebyscheffsche Ungleichung | 32 |
| 1.4.2.11 | Verallgemeinerte Tschebyscheffsche Ungleichung | 33 |
| 1.4.2.12 | Höldersche Ungleichung | 33 |
| 1.4.2.13 | Minkowskische Ungleichung | 34 |
| 1.4.3 | Lösung von Ungleichungen 1. und 2. Grades | 34 |
| 1.4.3.1 | Allgemeines | 34 |
| 1.4.3.2 | Ungleichungen 1. Grades | 34 |
| 1.4.3.3 | Ungleichungen 2. Grades | 34 |
| 1.4.3.4 | Allgemeiner Fall der Ungleichung 2. Grades | 35 |
| 1.5 | Komplexe Zahlen | 35 |
| 1.5.1 | Imaginäre und komplexe Zahlen | 35 |
| 1.5.1.1 | Imaginäre Einheit | 35 |
| 1.5.1.2 | Komplexe Zahlen | 35 |
| 1.5.2 | Geometrische Darstellung | 36 |
| 1.5.2.1 | Vektordarstellung | 36 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1.5.2.2 | Gleichheit komplexer Zahlen | 36 |
| 1.5.2.3 | Trigonometrische Form der komplexen Zahlen | 36 |
| 1.5.2.4 | Exponentialform einer komplexen Zahl | 37 |
| 1.5.2.5 | Konjugiert komplexe Zahlen | 37 |
| 1.5.3 | Rechnen mit komplexen Zahlen | 37 |
| 1.5.3.1 | Addition und Subtraktion | 37 |
| 1.5.3.2 | Multiplikation | 38 |
| 1.5.3.3 | Division | 38 |
| 1.5.3.4 | Allgemeine Regeln für die vier Grundrechenarten | 39 |
| 1.5.3.5 | Potenzieren einer komplexen Zahl | 39 |
| 1.5.3.6 | Radizieren oder Ziehen der n -ten Wurzel aus einer komplexen Zahl | 39 |
| 1.6 | Algebraische und transzendente Gleichungen | 39 |
| 1.6.1 | Umformung algebraischer Gleichungen auf die Normalform | 39 |
| 1.6.1.1 | Definitionen | 39 |
| 1.6.1.2 | Systeme aus n algebraischen Gleichungen | 40 |
| 1.6.1.3 | Scheinbare Wurzeln | 40 |
| 1.6.2 | Gleichungen 1. bis 4. Grades | 41 |
| 1.6.2.1 | Gleichungen 1. Grades (lineare Gleichungen) | 41 |
| 1.6.2.2 | Gleichungen 2. Grades (quadratische Gleichungen) | 41 |
| 1.6.2.3 | Gleichungen 3. Grades (kubische Gleichungen) | 42 |
| 1.6.2.4 | Gleichungen 4. Grades | 44 |
| 1.6.2.5 | Gleichungen 5. und höheren Grades | 45 |
| 1.6.3 | Gleichungen n -ten Grades | 45 |
| 1.6.3.1 | Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen | 45 |
| 1.6.3.2 | Gleichungen mit reellen Koeffizienten | 46 |
| 1.6.4 | Rückführung transzendenter Gleichungen auf algebraische Gleichungen | 47 |
| 1.6.4.1 | Definition | 47 |
| 1.6.4.2 | Exponentialgleichungen | 47 |
| 1.6.4.3 | Logarithmische Gleichungen | 48 |
| 1.6.4.4 | Trigonometrische Gleichungen | 48 |
| 1.6.4.5 | Gleichungen mit Hyperbelfunktionen | 48 |
| 2 | Funktionen und ihre Darstellung | 49 |
| 2.1 | Funktionsbegriff | 49 |
| 2.1.1 | Definition der Funktion | 49 |
| 2.1.1.1 | Funktion | 49 |
| 2.1.1.2 | Reelle Funktion | 49 |
| 2.1.1.3 | Funktion von mehreren Veränderlichen | 49 |
| 2.1.1.4 | Komplexe Funktion | 49 |
| 2.1.1.5 | Weitere Funktionen | 49 |
| 2.1.1.6 | Funktionale | 49 |
| 2.1.1.7 | Funktion und Abbildung | 50 |
| 2.1.2 | Methoden zur Definition einer reellen Funktion | 50 |
| 2.1.2.1 | Angabe einer Funktion | 50 |
| 2.1.2.2 | Analytische Darstellung reeller Funktionen | 50 |
| 2.1.3 | Einige Funktionstypen | 51 |
| 2.1.3.1 | Monotone Funktionen | 51 |
| 2.1.3.2 | Beschränkte Funktionen | 52 |
| 2.1.3.3 | Extremwerte von Funktionen | 52 |
| 2.1.3.4 | Gerade Funktionen | 52 |
| 2.1.3.5 | Ungerade Funktionen | 52 |
| 2.1.3.6 | Darstellung mithilfe gerader und ungerader Funktionen | 53 |

| | | |
|---------|--|----|
| 2.1.3.7 | Periodische Funktionen | 53 |
| 2.1.3.8 | Inverse oder Umkehrfunktionen | 53 |
| 2.1.4 | Grenzwert von Funktionen | 54 |
| 2.1.4.1 | Definition des Grenzwertes einer Funktion | 54 |
| 2.1.4.2 | Zurückführung auf den Grenzwert einer Folge | 54 |
| 2.1.4.3 | Konvergenzkriterium von Cauchy | 54 |
| 2.1.4.4 | Unendlicher Grenzwert einer Funktion | 55 |
| 2.1.4.5 | Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert einer Funktion | 55 |
| 2.1.4.6 | Grenzwert einer Funktion für x gegen unendlich | 55 |
| 2.1.4.7 | Sätze über Grenzwerte von Funktionen | 56 |
| 2.1.4.8 | Berechnung von Grenzwerten | 56 |
| 2.1.4.9 | Größenordnung von Funktionen und Landau-Symbole | 58 |
| 2.1.5 | Stetigkeit einer Funktion | 59 |
| 2.1.5.1 | Stetigkeit und Unstetigkeitsstelle | 59 |
| 2.1.5.2 | Definition der Stetigkeit | 60 |
| 2.1.5.3 | Häufig auftretende Arten von Unstetigkeiten | 60 |
| 2.1.5.4 | Stetigkeit und Unstetigkeitspunkte elementarer Funktionen | 61 |
| 2.1.5.5 | Eigenschaften stetiger Funktionen | 62 |
| 2.2 | Elementare Funktionen | 63 |
| 2.2.1 | Algebraische Funktionen | 63 |
| 2.2.1.1 | Ganzrationale Funktionen (Polynome) | 63 |
| 2.2.1.2 | Gebrochenrationale Funktionen | 63 |
| 2.2.1.3 | Irrationale Funktionen | 64 |
| 2.2.2 | Transzendente Funktionen | 64 |
| 2.2.2.1 | Exponentialfunktionen | 64 |
| 2.2.2.2 | Logarithmische Funktionen | 64 |
| 2.2.2.3 | Trigonometrische Funktionen | 64 |
| 2.2.2.4 | Inverse trigonometrische Funktionen | 64 |
| 2.2.2.5 | Hyperbelfunktionen | 64 |
| 2.2.2.6 | Inverse Hyperbelfunktionen | 64 |
| 2.2.3 | Zusammengesetzte Funktionen | 64 |
| 2.3 | Polynome | 65 |
| 2.3.1 | Lineare Funktion | 65 |
| 2.3.2 | Quadratisches Polynom | 65 |
| 2.3.3 | Polynom 3. Grades | 65 |
| 2.3.4 | Polynom n -ten Grades | 66 |
| 2.3.5 | Parabel n -ter Ordnung | 66 |
| 2.4 | Gebrochenrationale Funktionen | 67 |
| 2.4.1 | Spezielle gebrochen lineare Funktion | 67 |
| 2.4.2 | Gebrochenlineare Funktion | 67 |
| 2.4.3 | Kurve 3. Ordnung, Typ I | 68 |
| 2.4.4 | Kurve 3. Ordnung, Typ II | 68 |
| 2.4.5 | Kurve 3. Ordnung, Typ III | 69 |
| 2.4.6 | Reziproke Potenz | 71 |
| 2.5 | Irrationale Funktionen | 72 |
| 2.5.1 | Quadratwurzel aus einem linearen Binom | 72 |
| 2.5.2 | Quadratwurzel aus einem quadratischen Polynom | 72 |
| 2.5.3 | Potenzfunktion | 72 |
| 2.6 | Exponentialfunktionen und logarithmische Funktionen | 73 |
| 2.6.1 | Exponentialfunktion | 73 |
| 2.6.2 | Logarithmische Funktionen | 73 |
| 2.6.3 | Gaußsche Glockenkurve | 74 |

| | | |
|----------|---|----|
| 2.6.4 | Exponentialsumme | 74 |
| 2.6.5 | Verallgemeinerte Gaußsche Glockenkurve | 76 |
| 2.6.6 | Produkt aus Potenz- und Exponentialfunktion | 76 |
| 2.7 | Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen) | 77 |
| 2.7.1 | Grundlagen | 77 |
| 2.7.1.1 | Definition und Darstellung | 77 |
| 2.7.1.2 | Wertebereiche und Funktionsverläufe | 79 |
| 2.7.2 | Wichtige Formeln für trigonometrische Funktionen | 81 |
| 2.7.2.1 | Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen | 81 |
| 2.7.2.2 | Trigonometrische Funktionen der Summe und der Differenz zweier Winkel (Additionstheoreme) | 81 |
| 2.7.2.3 | Trigonometrische Funktionen für Winkelvielfache | 82 |
| 2.7.2.4 | Trigonometrische Funktionen des halben Winkels | 83 |
| 2.7.2.5 | Summen und Differenzen zweier trigonometrischer Funktionen | 83 |
| 2.7.2.6 | Produkte trigonometrischer Funktionen | 83 |
| 2.7.2.7 | Potenzen trigonometrischer Funktionen | 84 |
| 2.7.3 | Beschreibung von Schwingungen | 84 |
| 2.7.3.1 | Problemstellung | 84 |
| 2.7.3.2 | Superposition oder Überlagerung von Schwingungen | 84 |
| 2.7.3.3 | Vektordiagramm für Schwingungen | 85 |
| 2.7.3.4 | Dämpfung von Schwingungen | 85 |
| 2.8 | Zyklometrische Funktionen (Arkusfunktionen) | 86 |
| 2.8.1 | Definition der zyklometrischen Funktionen | 86 |
| 2.8.2 | Zurückführung auf die Hauptwerte | 86 |
| 2.8.3 | Beziehungen zwischen den Hauptwerten | 87 |
| 2.8.4 | Formeln für negative Argumente | 88 |
| 2.8.5 | Summe und Differenz von $\arcsin x$ und $\arcsin y$ | 88 |
| 2.8.6 | Summe und Differenz von $\arccos x$ und $\arccos y$ | 88 |
| 2.8.7 | Summe und Differenz von $\arctan x$ und $\arctan y$ | 88 |
| 2.8.8 | Spezielle Beziehungen für $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ | 89 |
| 2.9 | Hyperbelfunktionen | 89 |
| 2.9.1 | Definition der Hyperbelfunktionen | 89 |
| 2.9.2 | Grafische Darstellung der Hyperbelfunktionen | 90 |
| 2.9.2.1 | Hyperbelsinus | 90 |
| 2.9.2.2 | Hyperbelkosinus | 90 |
| 2.9.2.3 | Hyperbeltangens | 91 |
| 2.9.2.4 | Hyperbelkotangens | 91 |
| 2.9.3 | Wichtige Formeln für Hyperbelfunktionen | 91 |
| 2.9.3.1 | Hyperbelfunktionen einer Variablen | 91 |
| 2.9.3.2 | Darstellung einer Hyperbelfunktion durch eine andere gleichen Argumentes | 91 |
| 2.9.3.3 | Formeln für negative Argumente | 91 |
| 2.9.3.4 | Hyperbelfunktionen der Summe und der Differenz zweier Argumente (Additionstheoreme) | 92 |
| 2.9.3.5 | Hyperbelfunktionen des doppelten Arguments | 92 |
| 2.9.3.6 | Formel von Moivre für Hyperbelfunktionen | 92 |
| 2.9.3.7 | Hyperbelfunktionen des halben Arguments | 92 |
| 2.9.3.8 | Summen und Differenzen von Hyperbelfunktionen | 92 |
| 2.9.3.9 | Zusammenhang zwischen den Hyperbel- und den trigonometrischen Funktionen mithilfe komplexer Argumente | 93 |
| 2.10 | Areafunktionen | 93 |
| 2.10.1 | Definitionen | 93 |
| 2.10.1.1 | Areasinus | 93 |

| | | | |
|------|----------|--|-----|
| | 2.10.1.2 | Areakosinus | 93 |
| | 2.10.1.3 | Areatangens | 93 |
| | 2.10.1.4 | Areakotangens | 93 |
| | 2.10.2 | Darstellung der Areafunktionen durch den natürlichen Logarithmus | 94 |
| | 2.10.3 | Beziehungen zwischen den verschiedenen Areafunktionen | 95 |
| | 2.10.4 | Summen und Differenzen von Areafunktionen | 95 |
| | 2.10.5 | Formeln für negative Argumente | 95 |
| 2.11 | | Kurven dritter Ordnung | 95 |
| | 2.11.1 | Semikubische Parabel | 95 |
| | 2.11.2 | Versiera der Agnesi | 96 |
| | 2.11.3 | Kartesisches Blatt | 96 |
| | 2.11.4 | Zissoide | 97 |
| | 2.11.5 | Strophoide | 97 |
| 2.12 | | Kurven vierter Ordnung | 98 |
| | 2.12.1 | Konchoide des Nikomedes | 98 |
| | 2.12.2 | Allgemeine Konchoide | 99 |
| | 2.12.3 | Pascalsche Schnecke | 99 |
| | 2.12.4 | Kardioide | 100 |
| | 2.12.5 | Cassinische Kurven | 101 |
| | 2.12.6 | Lemniskate | 102 |
| 2.13 | | Zykloiden | 102 |
| | 2.13.1 | Gewöhnliche Zykloide | 102 |
| | 2.13.2 | Verlängerte und verkürzte Zykloiden oder Trochoiden | 102 |
| | 2.13.3 | Epizykloide | 103 |
| | 2.13.4 | Hypozykloide und Astroide | 104 |
| | 2.13.5 | Verlängerte und verkürzte Epizykloide und Hypozykloide | 106 |
| 2.14 | | Spiralen | 106 |
| | 2.14.1 | Archimedische Spirale | 106 |
| | 2.14.2 | Hyperbolische Spirale | 107 |
| | 2.14.3 | Logarithmische Spirale | 107 |
| | 2.14.4 | Evolvente des Kreises | 107 |
| | 2.14.5 | Klothoide | 108 |
| 2.15 | | Verschiedene andere Kurven | 108 |
| | 2.15.1 | Kettenlinie oder Katenoide | 108 |
| | 2.15.2 | Schleppkurve oder Traktrix | 108 |
| 2.16 | | Aufstellung empirischer Kurven | 110 |
| | 2.16.1 | Verfahrensweise | 110 |
| | | 2.16.1.1 Kurvenbildervergleiche | 110 |
| | | 2.16.1.2 Rektifizierung | 110 |
| | | 2.16.1.3 Parameterbestimmung | 110 |
| | 2.16.2 | Gebräuchlichste empirische Formeln | 111 |
| | | 2.16.2.1 Potenzfunktionen | 111 |
| | | 2.16.2.2 Exponentialfunktionen | 111 |
| | | 2.16.2.3 Quadratisches Polynom | 112 |
| | | 2.16.2.4 Gebrochenlineare Funktion | 113 |
| | | 2.16.2.5 Quadratwurzel aus einem quadratischen Polynom | 113 |
| | | 2.16.2.6 Verallgemeinerte Gaußsche Glockenkurve | 114 |
| | | 2.16.2.7 Kurve 3. Ordnung, Typ II | 114 |
| | | 2.16.2.8 Kurve 3. Ordnung, Typ III | 114 |
| | | 2.16.2.9 Kurve 3. Ordnung, Typ I | 114 |
| | | 2.16.2.10 Produkt aus Potenz- und Exponentialfunktion | 115 |

| | | |
|----------|---|------------|
| | 2.16.2.11 Exponentialsumme | 115 |
| | 2.16.2.12 Vollständig durchgerechnetes Beispiel | 116 |
| 2.17 | Skalen und Funktionspapiere | 117 |
| | 2.17.1 Skalen | 117 |
| | 2.17.2 Funktionspapiere | 119 |
| | 2.17.2.1 Einfach-logarithmisches Funktionspapier | 119 |
| | 2.17.2.2 Doppelt-logarithmisches Funktionspapier | 119 |
| | 2.17.2.3 Funktionspapier mit einer reziproken Skala | 119 |
| | 2.17.2.4 Hinweis | 120 |
| 2.18 | Funktionen von mehreren Veränderlichen | 121 |
| | 2.18.1 Definition und Darstellung | 121 |
| | 2.18.1.1 Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher | 121 |
| | 2.18.1.2 Geometrische Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher | 121 |
| | 2.18.2 Verschiedene ebene Definitionsbereiche | 122 |
| | 2.18.2.1 Definitionsbereich einer durch eine Menge gegebenen Funktion | 122 |
| | 2.18.2.2 Zweidimensionale Gebiete | 122 |
| | 2.18.2.3 Drei- und mehrdimensionale Gebiete | 122 |
| | 2.18.2.4 Methoden zur Definition einer Funktion | 122 |
| | 2.18.2.5 Formen der analytischen Darstellung einer Funktion | 124 |
| | 2.18.2.6 Abhängigkeit von Funktionen | 125 |
| | 2.18.3 Grenzwerte | 126 |
| | 2.18.3.1 Definition | 126 |
| | 2.18.3.2 Exakte Formulierung | 126 |
| | 2.18.3.3 Verallgemeinerung auf mehrere Veränderliche | 126 |
| | 2.18.3.4 Iterierte Grenzwerte | 126 |
| | 2.18.4 Stetigkeit | 127 |
| | 2.18.5 Eigenschaften stetiger Funktionen | 127 |
| | 2.18.5.1 Nullstellensatz von Bolzano | 127 |
| | 2.18.5.2 Zwischenwertsatz | 127 |
| | 2.18.5.3 Satz über die Beschränktheit einer Funktion | 127 |
| | 2.18.5.4 Satz von Weierstrass über die Existenz des größten und kleinsten Funktionswertes | 127 |
| 2.19 | Nomographie | 128 |
| | 2.19.1 Nomogramme | 128 |
| | 2.19.2 Netztafeln | 128 |
| | 2.19.3 Fluchtlinientafeln | 129 |
| | 2.19.3.1 Fluchtlinientafeln mit drei geraden Skalen durch einen Punkt | 129 |
| | 2.19.3.2 Fluchtlinientafeln mit zwei parallelen und einer dazu geneigten geradlinigen Skala | 130 |
| | 2.19.3.3 Fluchtlinientafeln mit zwei parallelen, geradlinigen Skalen und einer Kurvenskala | 130 |
| | 2.19.4 Netztafeln für mehr als drei Veränderliche | 131 |
| 3 | Geometrie | 132 |
| | 3.1 Planimetrie | 132 |
| | 3.1.1 Grundbegriffe | 132 |
| | 3.1.1.1 Punkt, Gerade, Strahl, Strecke | 132 |
| | 3.1.1.2 Winkel | 132 |
| | 3.1.1.3 Winkel an zwei sich schneidenden Geraden | 133 |
| | 3.1.1.4 Winkelpaare an geschnittenen Parallelen | 133 |
| | 3.1.1.5 Winkel im Gradmaß und im Bogenmaß | 134 |

| | | |
|---------|--|-----|
| 3.1.2 | Geometrische Definition der Kreis- und Hyperbel-Funktionen | 134 |
| 3.1.2.1 | Definition der Kreis- oder trigonometrischen Funktionen | 134 |
| 3.1.2.2 | Definition der Hyperbelfunktionen | 135 |
| 3.1.3 | Ebene Dreiecke | 136 |
| 3.1.3.1 | Aussagen zu ebenen Dreiecken | 136 |
| 3.1.3.2 | Symmetrie | 137 |
| 3.1.4 | Ebene Vierecke | 139 |
| 3.1.4.1 | Parallelogramm | 139 |
| 3.1.4.2 | Rechteck und Quadrat | 139 |
| 3.1.4.3 | Rhombus oder Raute | 139 |
| 3.1.4.4 | Trapez | 139 |
| 3.1.4.5 | Allgemeines Viereck | 140 |
| 3.1.4.6 | Sehnenviereck | 140 |
| 3.1.4.7 | Tangentenviereck | 141 |
| 3.1.5 | Ebene Vielecke oder Polygone | 141 |
| 3.1.5.1 | Allgemeines Vieleck | 141 |
| 3.1.5.2 | Regelmäßige konvexe Vielecke | 141 |
| 3.1.5.3 | Einige regelmäßige konvexe Vielecke | 142 |
| 3.1.6 | Ebene Kreisfiguren | 143 |
| 3.1.6.1 | Kreis | 143 |
| 3.1.6.2 | Kreisabschnitt (Kreissegment) und Kreisabschnitt (Kreissektor) | 145 |
| 3.1.6.3 | Kreisring | 145 |
| 3.2 | Ebene Trigonometrie | 146 |
| 3.2.1 | Dreiecksberechnungen | 146 |
| 3.2.1.1 | Berechnungen in rechtwinkligen ebenen Dreiecken | 146 |
| 3.2.1.2 | Berechnungen in ebenen schiefwinkligen Dreiecken | 146 |
| 3.2.2 | Geodätische Anwendungen | 149 |
| 3.2.2.1 | Geodätische Koordinaten | 149 |
| 3.2.2.2 | Winkel in der Geodäsie | 150 |
| 3.2.2.3 | Vermessungstechnische Anwendungen | 152 |
| 3.3 | Stereometrie | 155 |
| 3.3.1 | Geraden und Ebenen im Raum | 155 |
| 3.3.2 | Kanten, Ecken, Raumwinkel | 156 |
| 3.3.3 | Polyeder | 157 |
| 3.3.4 | Körper, die durch gekrümmte Flächen begrenzt sind | 160 |
| 3.4 | Sphärische Trigonometrie | 164 |
| 3.4.1 | Grundbegriffe der Geometrie auf der Kugel | 164 |
| 3.4.1.1 | Kurven, Bogen und Winkel auf der Kugel | 164 |
| 3.4.1.2 | Spezielle Koordinatensysteme | 166 |
| 3.4.1.3 | Sphärisches Zweieck | 167 |
| 3.4.1.4 | Sphärisches Dreieck | 167 |
| 3.4.1.5 | Polardreieck | 168 |
| 3.4.1.6 | Eulersche und Nicht-Eulersche Dreiecke | 168 |
| 3.4.1.7 | Dreikant | 169 |
| 3.4.2 | Haupteigenschaften sphärischer Dreiecke | 169 |
| 3.4.2.1 | Allgemeine Aussagen | 169 |
| 3.4.2.2 | Grundformeln und Anwendungen | 170 |
| 3.4.2.3 | Weitere Formeln | 172 |
| 3.4.3 | Berechnung sphärischer Dreiecke | 174 |
| 3.4.3.1 | Grundaufgaben, Genauigkeitsbetrachtungen | 174 |
| 3.4.3.2 | Rechtwinklig sphärisches Dreieck | 174 |

| | | | |
|-----|----------|---|-----|
| | 3.4.3.3 | Schiefwinklig sphärisches Dreieck | 176 |
| | 3.4.3.4 | Sphärische Kurven | 180 |
| 3.5 | | Vektoralgebra und analytische Geometrie | 186 |
| | 3.5.1 | Vektoralgebra | 186 |
| | 3.5.1.1 | Definition des Vektors | 186 |
| | 3.5.1.2 | Rechenregeln | 187 |
| | 3.5.1.3 | Koordinaten eines Vektors | 188 |
| | 3.5.1.4 | Richtungskoeffizient oder Entwicklungskoeffizient | 189 |
| | 3.5.1.5 | Skalarprodukt und Vektorprodukt | 189 |
| | 3.5.1.6 | Mehrfache multiplikative Verknüpfungen | 191 |
| | 3.5.1.7 | Vektorielle Gleichungen | 193 |
| | 3.5.1.8 | Kovariante und kontravariante Koordinaten eines Vektors | 194 |
| | 3.5.1.9 | Geometrische Anwendungen der Vektoralgebra | 195 |
| | 3.5.2 | Analytische Geometrie der Ebene | 196 |
| | 3.5.2.1 | Ebene Koordinatensysteme | 196 |
| | 3.5.2.2 | Koordinatentransformationen | 197 |
| | 3.5.2.3 | Spezielle Punkte in der Ebene | 198 |
| | 3.5.2.4 | Flächeninhalte | 200 |
| | 3.5.2.5 | Gleichung einer Kurve | 200 |
| | 3.5.2.6 | Gerade | 201 |
| | 3.5.2.7 | Kreis | 204 |
| | 3.5.2.8 | Ellipse | 205 |
| | 3.5.2.9 | Hyperbel | 207 |
| | 3.5.2.10 | Parabel | 210 |
| | 3.5.2.11 | Kurven 2. Ordnung (Kegelschnitte) | 212 |
| | 3.5.3 | Analytische Geometrie des Raumes | 215 |
| | 3.5.3.1 | Grundlagen | 215 |
| | 3.5.3.2 | Räumliche Koordinatensysteme | 217 |
| | 3.5.3.3 | Koordinatentransformationen | 219 |
| | 3.5.3.4 | Drehung mithilfe von Richtungskosinussen | 220 |
| | 3.5.3.5 | Drehung mithilfe von Cardan–Winkeln | 221 |
| | 3.5.3.6 | Drehung mithilfe von Euler–Winkeln | 222 |
| | 3.5.3.7 | Spezielle Punkte im Raum | 223 |
| | 3.5.3.8 | Gleichung einer Fläche | 224 |
| | 3.5.3.9 | Gleichung einer Raumkurve | 225 |
| | 3.5.3.10 | Ebenen im Raum | 225 |
| | 3.5.3.11 | Geraden im Raum | 228 |
| | 3.5.3.12 | Schnittpunkte und Winkel von Ebenen und Geraden im Raum | 229 |
| | 3.5.3.13 | Flächen 2. Ordnung, Gleichungen in Normalform | 231 |
| | 3.5.3.14 | Flächen 2. Ordnung, allgemeine Theorie | 234 |
| | 3.5.4 | Geometrische Transformationen und Koordinatentransformationen | 236 |
| | 3.5.4.1 | Geometrische 2D–Transformationen | 236 |
| | 3.5.4.2 | Homogene Koordinaten, Matrixdarstellung | 238 |
| | 3.5.4.3 | Koordinatentransformation | 238 |
| | 3.5.4.4 | Verkettung von Transformationen | 239 |
| | 3.5.4.5 | 3D–Transformationen | 240 |
| | 3.5.4.6 | Deformationstransformationen | 243 |
| | 3.5.5 | Planare Projektionen | 244 |
| | 3.5.5.1 | Klassifizierung | 244 |
| | 3.5.5.2 | Ansichtskordinatensystem | 245 |
| | 3.5.5.3 | Tafelprojektionen | 245 |
| | 3.5.5.4 | Axonometrische Projektion | 246 |

| | | | |
|----------|---------|--|------------|
| | 3.5.5.5 | Isometrische Projektion | 246 |
| | 3.5.5.6 | Schiefe Parallelprojektion | 247 |
| | 3.5.5.7 | Perspektivische Projektion | 248 |
| 3.6 | | Differenzialgeometrie | 250 |
| | 3.6.1 | Ebene Kurven | 250 |
| | 3.6.1.1 | Definitionen ebener Kurven | 250 |
| | 3.6.1.2 | Lokale Elemente einer Kurve | 250 |
| | 3.6.1.3 | Ausgezeichnete Kurvenpunkte und Asymptoten | 256 |
| | 3.6.1.4 | Allgemeine Untersuchung einer Kurve nach ihrer Gleichung | 261 |
| | 3.6.1.5 | Evoluten und Evolventen | 262 |
| | 3.6.1.6 | Einhüllende von Kurvenscharen | 262 |
| | 3.6.2 | Raumkurven | 263 |
| | 3.6.2.1 | Definitionen für Raumkurven | 263 |
| | 3.6.2.2 | Begleitendes Dreibein | 264 |
| | 3.6.2.3 | Krümmung und Windung | 266 |
| | 3.6.3 | Flächen | 269 |
| | 3.6.3.1 | Definitionen für Flächen | 269 |
| | 3.6.3.2 | Tangentialebene und Flächennormale | 270 |
| | 3.6.3.3 | Linielement auf einer Fläche | 271 |
| | 3.6.3.4 | Krümmung einer Fläche | 273 |
| | 3.6.3.5 | Regelflächen und abwickelbare Flächen | 275 |
| | 3.6.3.6 | Geodätische Linien auf einer Fläche | 276 |
| 4 | | Lineare Algebra | 277 |
| | 4.1 | Matrizen | 277 |
| | 4.1.1 | Begriff der Matrix | 277 |
| | 4.1.2 | Quadratische Matrizen | 278 |
| | 4.1.3 | Vektoren | 279 |
| | 4.1.4 | Rechenoperationen mit Matrizen | 280 |
| | 4.1.5 | Rechenregeln für Matrizen | 283 |
| | 4.1.6 | Vektor- und Matrizennormen | 285 |
| | 4.1.6.1 | Vektornormen | 285 |
| | 4.1.6.2 | Matrizennormen | 285 |
| | 4.2 | Determinanten | 286 |
| | 4.2.1 | Definitionen | 286 |
| | 4.2.2 | Rechenregeln für Determinanten | 286 |
| | 4.2.3 | Berechnung von Determinanten | 287 |
| | 4.3 | Tensoren | 288 |
| | 4.3.1 | Transformation des Koordinatensystems | 288 |
| | 4.3.2 | Tensoren in kartesischen Koordinaten | 289 |
| | 4.3.3 | Tensoren mit speziellen Eigenschaften | 291 |
| | 4.3.3.1 | Tensoren 2. Stufe | 291 |
| | 4.3.3.2 | Invariante Tensoren | 291 |
| | 4.3.4 | Tensoren in krummlinigen Koordinatensystemen | 292 |
| | 4.3.4.1 | Kovariante und kontravariante Basisvektoren | 292 |
| | 4.3.4.2 | Kovariante und kontravariante Koordinaten von Tensoren 1. Stufe | 293 |
| | 4.3.4.3 | Kovariante, kontravariante und gemischte Koordinaten von Tensoren 2. Stufe | 294 |
| | 4.3.4.4 | Rechenregeln | 295 |
| | 4.3.5 | Pseudotensoren | 295 |
| | 4.3.5.1 | Punktspiegelung am Koordinatenursprung | 295 |
| | 4.3.5.2 | Einführung des Begriffs Pseudotensor | 296 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.4 | Quaternionen und Anwendungen | 297 |
| 4.4.1 | Quaternionen | 298 |
| 4.4.1.1 | Definition und Darstellung | 298 |
| 4.4.1.2 | Matrizendarstellung von Quaternionen | 299 |
| 4.4.1.3 | Rechenregeln | 300 |
| 4.4.2 | Darstellung von Drehungen im \mathbb{R}^3 | 302 |
| 4.4.2.1 | Drehungen eines Objektes um die Koordinatenachsen | 303 |
| 4.4.2.2 | Cardan–Winkel | 303 |
| 4.4.2.3 | Euler–Winkel | 304 |
| 4.4.2.4 | Drehung um eine beliebige Achse durch den Nullpunkt | 304 |
| 4.4.2.5 | Drehungen und Quaternionen | 305 |
| 4.4.2.6 | Quaternionen und Cardan–Winkel | 307 |
| 4.4.2.7 | Effizienz der Algorithmen | 309 |
| 4.4.3 | Anwendungen der Quaternionen | 310 |
| 4.4.3.1 | 3D–Rotationen in der Computergrafik | 310 |
| 4.4.3.2 | Interpolation mittels Rotationsmatrizen | 311 |
| 4.4.3.3 | Stereografische Projektion | 311 |
| 4.4.3.4 | Satellitennavigation | 312 |
| 4.4.3.5 | Vektoranalysis | 313 |
| 4.4.3.6 | Einheitsbiquaternionen und Starrkörperbewegungen | 314 |
| 4.5 | Lineare Gleichungssysteme | 315 |
| 4.5.1 | Lineare Systeme, Austauschverfahren | 315 |
| 4.5.1.1 | Lineare Systeme | 315 |
| 4.5.1.2 | Austauschverfahren | 315 |
| 4.5.1.3 | Lineare Abhängigkeiten | 316 |
| 4.5.1.4 | Invertierung einer Matrix | 316 |
| 4.5.2 | Lösung linearer Gleichungssysteme | 316 |
| 4.5.2.1 | Definition und Lösbarkeit | 316 |
| 4.5.2.2 | Anwendung des Austauschverfahrens | 318 |
| 4.5.2.3 | Cramersche Regel | 319 |
| 4.5.2.4 | Gaußscher Algorithmus | 320 |
| 4.5.3 | Überbestimmte lineare Gleichungssysteme | 321 |
| 4.5.3.1 | Überbestimmte lineare Gleichungssysteme und lineare Quadratmittelprobleme | 321 |
| 4.5.3.2 | Hinweise zur numerischen Lösung linearer Quadratmittelprobleme | 322 |
| 4.6 | Eigenwertaufgaben bei Matrizen | 322 |
| 4.6.1 | Allgemeines Eigenwertproblem | 322 |
| 4.6.2 | Spezielles Eigenwertproblem | 322 |
| 4.6.2.1 | Charakteristisches Polynom | 322 |
| 4.6.2.2 | Reelle symmetrische Matrizen, Ähnlichkeitstransformationen | 324 |
| 4.6.2.3 | Hauptachsentransformation quadratischer Formen | 325 |
| 4.6.2.4 | Hinweise zur numerischen Bestimmung von Eigenwerten | 327 |
| 4.6.3 | Singulärwertzerlegung | 329 |
| 5 | Algebra und Diskrete Mathematik | 330 |
| 5.1 | Logik | 330 |
| 5.1.1 | Aussagenlogik | 330 |
| 5.1.2 | Ausdrücke der Prädikatenlogik | 333 |
| 5.2 | Mengenlehre | 335 |
| 5.2.1 | Mengenbegriff, spezielle Mengen | 335 |
| 5.2.2 | Operationen mit Mengen | 336 |
| 5.2.3 | Relationen und Abbildungen | 339 |

| | | |
|---------|---|-----|
| 5.2.4 | Äquivalenz- und Ordnungsrelationen | 341 |
| 5.2.5 | Mächtigkeit von Mengen | 342 |
| 5.3 | Klassische algebraische Strukturen | 344 |
| 5.3.1 | Operationen | 344 |
| 5.3.2 | Halbgruppen | 344 |
| 5.3.3 | Gruppen | 344 |
| 5.3.3.1 | Definition und grundlegende Eigenschaften | 344 |
| 5.3.3.2 | Untergruppen und direkte Produkte | 346 |
| 5.3.3.3 | Abbildungen zwischen Gruppen | 347 |
| 5.3.4 | Darstellung von Gruppen | 348 |
| 5.3.4.1 | Definitionen | 348 |
| 5.3.4.2 | Spezielle Darstellungen | 351 |
| 5.3.4.3 | Direkte Summe von Darstellungen | 352 |
| 5.3.4.4 | Direktes Produkt von Darstellungen | 352 |
| 5.3.4.5 | Reduzible und irreduzible Darstellungen | 352 |
| 5.3.4.6 | Erstes Schursches Lemma | 353 |
| 5.3.4.7 | Clebsch–Gordan–Reihe | 353 |
| 5.3.4.8 | Irreduzible Darstellung der symmetrischen Gruppe S_M | 354 |
| 5.3.5 | Anwendungen von Gruppen | 354 |
| 5.3.5.1 | Symmetrieoperationen, Symmetrieelemente | 354 |
| 5.3.5.2 | Symmetriegruppen | 355 |
| 5.3.5.3 | Symmetrieoperationen bei Molekülen | 355 |
| 5.3.5.4 | Symmetriegruppen in der Kristallographie | 357 |
| 5.3.5.5 | Symmetriegruppen in der Quantenmechanik | 359 |
| 5.3.5.6 | Weitere Anwendungsbeispiele aus der Physik | 360 |
| 5.3.6 | Lie–Gruppen und Lie–Algebren | 360 |
| 5.3.6.1 | Einführung | 360 |
| 5.3.6.2 | Matrix–Lie–Gruppen | 361 |
| 5.3.6.3 | Wichtige Anwendungen | 364 |
| 5.3.6.4 | Lie–Algebra | 365 |
| 5.3.6.5 | Anwendungen in der Robotik | 367 |
| 5.3.7 | Ringe und Körper | 370 |
| 5.3.7.1 | Definitionen | 370 |
| 5.3.7.2 | Unterringe, Ideale | 371 |
| 5.3.7.3 | Homomorphismen, Isomorphismen, Homomorphiesatz | 372 |
| 5.3.7.4 | Endliche Körper und Schieberegister | 372 |
| 5.3.8 | Vektorräume | 374 |
| 5.3.8.1 | Definition | 374 |
| 5.3.8.2 | Lineare Abhängigkeit | 375 |
| 5.3.8.3 | Lineare Operatoren | 375 |
| 5.3.8.4 | Unterräume, Dimensionsformel | 376 |
| 5.3.8.5 | Euklidische Vektorräume, Euklidische Norm | 376 |
| 5.3.8.6 | Bilineare Abbildungen, Bilinearformen | 377 |
| 5.4 | Elementare Zahlentheorie | 379 |
| 5.4.1 | Teilbarkeit | 379 |
| 5.4.1.1 | Teilbarkeit und elementare Teilbarkeitsregeln | 379 |
| 5.4.1.2 | Primzahlen | 379 |
| 5.4.1.3 | Teilbarkeitskriterien | 381 |
| 5.4.1.4 | Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches | 382 |
| 5.4.1.5 | Fibonacci–Zahlen | 384 |
| 5.4.2 | Lineare Diophantische Gleichungen | 384 |
| 5.4.3 | Kongruenzen und Restklassen | 386 |

| | | |
|---------|--|-----|
| 5.4.4 | Sätze von Fermat, Euler und Wilson | 390 |
| 5.4.5 | Weitere Primzahltests | 391 |
| 5.4.6 | Codierungen | 392 |
| 5.4.6.1 | Prüfzeichenverfahren | 392 |
| 5.4.6.2 | Fehlerkorrigierende Codes | 394 |
| 5.5 | Kryptologie | 396 |
| 5.5.1 | Aufgabe der Kryptologie | 396 |
| 5.5.2 | Kryptosysteme | 396 |
| 5.5.3 | Mathematische Präzisierung | 397 |
| 5.5.4 | Sicherheit von Kryptosystemen | 397 |
| 5.5.4.1 | Methoden der klassischen Kryptologie | 398 |
| 5.5.4.2 | Affine Substitutionen | 398 |
| 5.5.4.3 | Vigenere-Chiffre | 398 |
| 5.5.4.4 | Matrixsubstitutionen | 399 |
| 5.5.5 | Methoden der klassischen Kryptoanalyse | 399 |
| 5.5.5.1 | Statistische Analyse | 399 |
| 5.5.5.2 | Kasiski-Friedman-Test | 399 |
| 5.5.6 | One-Time-Tape | 400 |
| 5.5.7 | Verfahren mit öffentlichem Schlüssel | 400 |
| 5.5.7.1 | Konzept von Diffie und Hellman | 400 |
| 5.5.7.2 | Einwegfunktionen | 401 |
| 5.5.7.3 | RSA-Verfahren | 401 |
| 5.5.8 | AES-Algorithmus (Advanced Encryption Standard) | 402 |
| 5.5.9 | IDEA-Algorithmus (International Data Encryption Algorithm) | 402 |
| 5.6 | Universelle Algebra | 403 |
| 5.6.1 | Definition | 403 |
| 5.6.2 | Kongruenzrelationen, Faktoralgebren | 403 |
| 5.6.3 | Homomorphismen | 403 |
| 5.6.4 | Homomorphiesatz | 404 |
| 5.6.5 | Varietäten | 404 |
| 5.6.6 | Termalgebren, freie Algebren | 404 |
| 5.7 | Boolesche Algebren und Schaltalgebra | 405 |
| 5.7.1 | Definition | 405 |
| 5.7.2 | Dualitätsprinzip | 405 |
| 5.7.3 | Endliche Boolesche Algebren | 406 |
| 5.7.4 | Boolesche Algebren als Ordnungen | 406 |
| 5.7.5 | Boolesche Funktionen, Boolesche Ausdrücke | 406 |
| 5.7.6 | Normalformen | 408 |
| 5.7.7 | Schaltalgebra | 408 |
| 5.8 | Algorithmen der Graphentheorie | 411 |
| 5.8.1 | Grundbegriffe und Bezeichnungen | 411 |
| 5.8.2 | Durchlaufungen von ungerichteten Graphen | 414 |
| 5.8.2.1 | Kantenfolgen | 414 |
| 5.8.2.2 | Eulersche Linien | 415 |
| 5.8.2.3 | Hamilton-Kreise | 416 |
| 5.8.3 | Bäume und Gerüste | 417 |
| 5.8.3.1 | Bäume | 417 |
| 5.8.3.2 | Gerüste | 418 |
| 5.8.4 | Matchings | 419 |
| 5.8.5 | Planare Graphen | 420 |
| 5.8.6 | Bahnen in gerichteten Graphen | 421 |
| 5.8.7 | Transportnetze | 422 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.9 | Fuzzy-Logik | 424 |
| 5.9.1 | Grundlagen der Fuzzy-Logik | 424 |
| 5.9.1.1 | Interpretation von Fuzzy-Mengen (Unscharfe Mengen) | 424 |
| 5.9.1.2 | Zugehörigkeitsfunktionen | 425 |
| 5.9.1.3 | Fuzzy-Mengen | 427 |
| 5.9.2 | Verknüpfungen unscharfer Mengen | 428 |
| 5.9.2.1 | Konzept für eine Verknüpfung (Aggregation) unscharfer Mengen | 429 |
| 5.9.2.2 | Praktische Verknüpfungen unscharfer Mengen | 429 |
| 5.9.2.3 | Kompensatorische Operatoren | 432 |
| 5.9.2.4 | Erweiterungsprinzip | 432 |
| 5.9.2.5 | Unscharfe Komplementfunktion | 432 |
| 5.9.3 | Fuzzy-wertige Relationen | 433 |
| 5.9.3.1 | Fuzzy-Relationen | 433 |
| 5.9.3.2 | Fuzzy-Relationenprodukt $R \circ S$ | 435 |
| 5.9.4 | Fuzzy-Inferenz | 436 |
| 5.9.5 | Defuzzifizierungsmethoden | 438 |
| 5.9.6 | Wissensbasierte Fuzzy-Systeme | 439 |
| 5.9.6.1 | Methode Mamdani | 439 |
| 5.9.6.2 | Methode Sugeno | 439 |
| 5.9.6.3 | Kognitive Systeme | 440 |
| 5.9.6.4 | Wissensbasiertes Interpolationssystem | 442 |
| 6 | Differenzialrechnung | 444 |
| 6.1 | Differenziation von Funktionen einer Veränderlichen | 444 |
| 6.1.1 | Differenzialquotient | 444 |
| 6.1.2 | Differenziationsregeln für Funktionen einer Veränderlicher | 445 |
| 6.1.2.1 | Ableitungen elementarer Funktionen | 445 |
| 6.1.2.2 | Grundregeln für das Differenzieren | 445 |
| 6.1.3 | Ableitungen höherer Ordnung | 451 |
| 6.1.3.1 | Definition der Ableitungen höherer Ordnung | 451 |
| 6.1.3.2 | Ableitungen höherer Ordnung der einfachsten Funktionen | 451 |
| 6.1.3.3 | Leibnizsche Regel | 451 |
| 6.1.3.4 | Höhere Ableitungen von Funktionen in Parameterdarstellung | 452 |
| 6.1.3.5 | Ableitungen höherer Ordnung der inversen Funktion | 452 |
| 6.1.4 | Hauptsätze der Differenzialrechnung | 453 |
| 6.1.4.1 | Monotoniebedingungen | 453 |
| 6.1.4.2 | Satz von Fermat | 453 |
| 6.1.4.3 | Satz von Rolle | 454 |
| 6.1.4.4 | Mittelwertsatz der Differenzialrechnung | 454 |
| 6.1.4.5 | Satz von Taylor für Funktionen von einer Veränderlichen | 455 |
| 6.1.4.6 | Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differenzialrechnung | 455 |
| 6.1.5 | Bestimmung von Extremwerten und Wendepunkten | 455 |
| 6.1.5.1 | Maxima und Minima | 455 |
| 6.1.5.2 | Notwendige Bedingung für die Existenz eines relativen Extremwertes | 456 |
| 6.1.5.3 | Ermittlung der relativen Extremwerte einer differenzierbaren, explizit gegebenen Funktion $y = f(x)$ | 456 |
| 6.1.5.4 | Bestimmung der globalen Extremwerte | 457 |
| 6.1.5.5 | Bestimmung der Extremwerte einer implizit gegebenen Funktion | 457 |
| 6.2 | Differenziation von Funktionen von mehreren Veränderlichen | 458 |
| 6.2.1 | Partielle Ableitungen | 458 |
| 6.2.1.1 | Partielle Ableitung einer Funktion | 458 |
| 6.2.1.2 | Geometrische Bedeutung bei zwei Veränderlichen | 458 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6.2.1.3 | Begriff des Differenzials | 458 |
| 6.2.1.4 | Haupteigenschaften des Differenzials | 459 |
| 6.2.1.5 | Partielles Differenzial | 460 |
| 6.2.2 | Vollständiges Differenzial und Differenziale höherer Ordnung | 460 |
| 6.2.2.1 | Begriff des vollständigen Differenzials einer Funktion von mehreren Veränderlichen (totales Differenzial) | 460 |
| 6.2.2.2 | Ableitungen und Differenziale höherer Ordnungen | 461 |
| 6.2.2.3 | Satz von Taylor für Funktionen von mehreren Veränderlichen | 462 |
| 6.2.3 | Differenziationsregeln für Funktionen von mehreren Veränderlichen | 463 |
| 6.2.3.1 | Differenziation von zusammengesetzten Funktionen | 463 |
| 6.2.3.2 | Differenziation impliziter Funktionen | 463 |
| 6.2.4 | Substitution von Variablen in Differenzialausdrücken und Koordinatentransformationen | 465 |
| 6.2.4.1 | Funktion von einer Veränderlichen | 465 |
| 6.2.4.2 | Funktion zweier Veränderlicher | 466 |
| 6.2.5 | Extremwerte von Funktionen von mehreren Veränderlichen | 467 |
| 6.2.5.1 | Definition des relativen Extremums | 467 |
| 6.2.5.2 | Geometrische Bedeutung | 467 |
| 6.2.5.3 | Bestimmung der Extremwerte einer differenzierbaren Funktion von zwei Veränderlichen | 468 |
| 6.2.5.4 | Bestimmung der Extremwerte einer Funktion von n Veränderlichen | 468 |
| 6.2.5.5 | Lösung von Approximationsaufgaben | 469 |
| 6.2.5.6 | Bestimmung der Extremwerte unter Vorgabe von Nebenbedingungen | 469 |
| 7 | Unendliche Reihen | 470 |
| 7.1 | Zahlenfolgen | 470 |
| 7.1.1 | Eigenschaften von Zahlenfolgen | 470 |
| 7.1.1.1 | Definition der Zahlenfolge | 470 |
| 7.1.1.2 | Monotone Zahlenfolgen | 470 |
| 7.1.1.3 | Beschränkte Zahlenfolgen | 470 |
| 7.1.2 | Grenzwerte von Zahlenfolgen | 471 |
| 7.2 | Reihen mit konstanten Gliedern | 472 |
| 7.2.1 | Allgemeine Konvergenzsätze | 472 |
| 7.2.1.1 | Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen | 472 |
| 7.2.1.2 | Allgemeine Sätze über die Konvergenz von Reihen | 473 |
| 7.2.2 | Konvergenzkriterien für Reihen mit positiven Gliedern | 473 |
| 7.2.2.1 | Vergleichskriterium | 473 |
| 7.2.2.2 | Quotientenkriterium von d'Alembert | 474 |
| 7.2.2.3 | Wurzelkriterium von Cauchy | 474 |
| 7.2.2.4 | Integralkriterium von Cauchy | 475 |
| 7.2.3 | Absolute und bedingte Konvergenz | 475 |
| 7.2.3.1 | Definition | 475 |
| 7.2.3.2 | Eigenschaften absolut konvergenter Reihen | 476 |
| 7.2.3.3 | Alternierende Reihen | 476 |
| 7.2.4 | Einige spezielle Reihen | 477 |
| 7.2.4.1 | Summenwerte einiger Reihen mit konstanten Gliedern | 477 |
| 7.2.4.2 | Bernoullische und Eulersche Zahlen | 478 |
| 7.2.5 | Abschätzung des Reihenrestes | 479 |
| 7.2.5.1 | Abschätzung mittels Majorante | 479 |
| 7.2.5.2 | Alternierende konvergente Reihen | 480 |
| 7.2.5.3 | Spezielle Reihen | 480 |
| 7.3 | Funktionsreihen | 480 |
| 7.3.1 | Definitionen | 480 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 7.3.2 | Gleichmäßige Konvergenz | 481 |
| 7.3.2.1 | Definition, Satz von Weierstrass | 481 |
| 7.3.2.2 | Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Reihen | 482 |
| 7.3.3 | Potenzreihen | 482 |
| 7.3.3.1 | Definition, Konvergenz | 482 |
| 7.3.3.2 | Rechnen mit Potenzreihen | 483 |
| 7.3.3.3 | Entwicklung in Taylor-Reihen, MacLaurinsche Reihe | 484 |
| 7.3.4 | Näherungsformeln | 485 |
| 7.3.5 | Asymptotische Potenzreihen | 485 |
| 7.3.5.1 | Asymptotische Gleichheit | 485 |
| 7.3.5.2 | Asymptotische Potenzreihen | 485 |
| 7.4 | Fourier-Reihen | 487 |
| 7.4.1 | Trigonometrische Summe und Fourier-Reihe | 487 |
| 7.4.1.1 | Grundbegriffe | 487 |
| 7.4.1.2 | Wichtigste Eigenschaften von Fourier-Reihen | 488 |
| 7.4.2 | Koeffizientenbestimmung für symmetrische Funktionen | 489 |
| 7.4.2.1 | Symmetrien verschiedener Art | 489 |
| 7.4.2.2 | Formen der Entwicklung in eine Fourier-Reihe | 490 |
| 7.4.3 | Koeffizientenbestimmung mithilfe numerischer Methoden | 490 |
| 7.4.4 | Fourier-Reihe und Fourier-Integral | 491 |
| 7.4.5 | Hinweise zur Tabelle einiger Fourier-Entwicklungen | 492 |
| 8 | Integralrechnung | 493 |
| 8.1 | Unbestimmtes Integral | 493 |
| 8.1.1 | Stammfunktion oder Integral | 493 |
| 8.1.1.1 | Unbestimmte Integrale | 494 |
| 8.1.1.2 | Integrale elementarer Funktionen | 494 |
| 8.1.2 | Integrationsregeln | 494 |
| 8.1.3 | Integration rationaler Funktionen | 498 |
| 8.1.3.1 | Integrale ganzrationaler Funktionen (Polynome) | 498 |
| 8.1.3.2 | Integrale gebrochenrationaler Funktionen | 498 |
| 8.1.3.3 | Vier Fälle bei der Partialbruchzerlegung | 498 |
| 8.1.4 | Integration irrationaler Funktionen | 501 |
| 8.1.4.1 | Substitution zur Rückführung auf Integrale rationaler Funktionen | 501 |
| 8.1.4.2 | Integration binomischer Integranden | 502 |
| 8.1.4.3 | Elliptische Integrale | 502 |
| 8.1.5 | Integration trigonometrischer Funktionen | 504 |
| 8.1.5.1 | Substitution | 504 |
| 8.1.5.2 | Vereinfachte Methoden | 504 |
| 8.1.6 | Integration weiterer transzendenter Funktionen | 505 |
| 8.1.6.1 | Integrale mit Exponentialfunktionen | 505 |
| 8.1.6.2 | Integrale mit Hyperbelfunktionen | 505 |
| 8.1.6.3 | Anwendung der partiellen Integration | 506 |
| 8.1.6.4 | Integrale transzendenter Funktionen | 506 |
| 8.2 | Bestimmte Integrale | 506 |
| 8.2.1 | Grundbegriffe, Regeln und Sätze | 506 |
| 8.2.1.1 | Definition und Existenz des bestimmten Integrals | 506 |
| 8.2.1.2 | Eigenschaften bestimmter Integrale | 507 |
| 8.2.1.3 | Weitere Sätze über Integrationsgrenzen | 509 |
| 8.2.1.4 | Berechnung bestimmter Integrale | 511 |
| 8.2.2 | Anwendungen bestimmter Integrale | 513 |
| 8.2.2.1 | Allgemeines Prinzip zur Anwendung des bestimmten Integrals | 513 |

| | | |
|---------|---|-----|
| 8.2.2.2 | Anwendungen in der Geometrie | 514 |
| 8.2.2.3 | Anwendungen in Mechanik und Physik | 517 |
| 8.2.3 | Uneigentliche Integrale, Stieltjes- und Lebesgue-Integrale | 519 |
| 8.2.3.1 | Verallgemeinerungen des Integralbegriffs | 519 |
| 8.2.3.2 | Integrale mit unendlichen Integrationsgrenzen | 520 |
| 8.2.3.3 | Integrale mit unbeschränktem Integranden | 522 |
| 8.2.4 | Parameterintegrale | 525 |
| 8.2.4.1 | Definition des Parameterintegrals | 525 |
| 8.2.4.2 | Differenziation unter dem Integralzeichen | 525 |
| 8.2.4.3 | Integration unter dem Integralzeichen | 525 |
| 8.2.5 | Integration durch Reihenentwicklung, spezielle nichtelementare Funktionen | 526 |
| 8.3 | Kurvenintegrale | 528 |
| 8.3.1 | Kurvenintegrale 1. Art | 529 |
| 8.3.1.1 | Definitionen | 529 |
| 8.3.1.2 | Existenzsatz | 529 |
| 8.3.1.3 | Berechnung des Kurvenintegrals 1. Art | 530 |
| 8.3.1.4 | Anwendungen des Kurvenintegrals 1. Art | 530 |
| 8.3.2 | Kurvenintegrale 2. Art | 530 |
| 8.3.2.1 | Definitionen | 530 |
| 8.3.2.2 | Existenzsatz | 532 |
| 8.3.2.3 | Berechnung der Kurvenintegrale 2. Art | 532 |
| 8.3.3 | Kurvenintegrale allgemeiner Art | 533 |
| 8.3.3.1 | Definition | 533 |
| 8.3.3.2 | Eigenschaften des Kurvenintegrals allgemeiner Art | 533 |
| 8.3.3.3 | Umlaufintegral | 534 |
| 8.3.4 | Unabhängigkeit des Kurvenintegrals vom Integrationsweg | 534 |
| 8.3.4.1 | Zweidimensionaler Fall | 534 |
| 8.3.4.2 | Existenz der Stammfunktion | 535 |
| 8.3.4.3 | Dreidimensionaler Fall | 535 |
| 8.3.4.4 | Berechnung der Stammfunktion | 535 |
| 8.3.4.5 | Verschwinden des Umlaufintegrals | 536 |
| 8.4 | Mehrfachintegrale | 537 |
| 8.4.1 | Doppelintegral | 537 |
| 8.4.1.1 | Begriff des Doppelintegrals | 537 |
| 8.4.1.2 | Berechnung des Doppelintegrals | 538 |
| 8.4.1.3 | Anwendungen von Doppelintegralen | 540 |
| 8.4.2 | Dreifachintegral | 540 |
| 8.4.2.1 | Begriff des Dreifachintegrals | 541 |
| 8.4.2.2 | Berechnung des Dreifachintegrals | 541 |
| 8.4.2.3 | Anwendungen von Dreifachintegralen | 545 |
| 8.5 | Oberflächenintegrale | 545 |
| 8.5.1 | Oberflächenintegrale 1. Art | 545 |
| 8.5.1.1 | Begriff des Oberflächenintegrals 1. Art | 545 |
| 8.5.1.2 | Berechnung des Oberflächenintegrals 1. Art | 547 |
| 8.5.1.3 | Anwendungen des Oberflächenintegrals 1. Art | 548 |
| 8.5.2 | Oberflächenintegrale 2. Art | 548 |
| 8.5.2.1 | Begriff des Oberflächenintegrals 2. Art | 548 |
| 8.5.2.2 | Berechnung des Oberflächenintegrals 2. Art | 550 |
| 8.5.3 | Oberflächenintegral allgemeiner Art | 551 |
| 8.5.3.1 | Begriff des Oberflächenintegrals allgemeiner Art | 551 |
| 8.5.3.2 | Eigenschaften des Oberflächenintegrals allgemeiner Art | 551 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 9 | Differenzialgleichungen | 553 |
| 9.1 | Gewöhnliche Differenzialgleichungen | 553 |
| 9.1.1 | Differenzialgleichungen 1. Ordnung | 554 |
| 9.1.1.1 | Existenzsatz, Richtungsfeld | 554 |
| 9.1.1.2 | Wichtige Integrationsmethoden | 555 |
| 9.1.1.3 | Implizite Differenzialgleichungen | 558 |
| 9.1.1.4 | Singuläre Integrale und singuläre Punkte | 559 |
| 9.1.1.5 | Näherungsmethoden zur Integration von Differenzialgleichungen 1. Ordnung | 562 |
| 9.1.2 | Differenzialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differenzialgleichungen | 564 |
| 9.1.2.1 | Grundlegende Betrachtungen | 564 |
| 9.1.2.2 | Erniedrigung der Ordnung | 565 |
| 9.1.2.3 | Lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung | 567 |
| 9.1.2.4 | Lösung linearer Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten | 569 |
| 9.1.2.5 | Systeme linearer Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten | 571 |
| 9.1.2.6 | Lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung | 574 |
| 9.1.3 | Randwertprobleme | 582 |
| 9.1.3.1 | Problemstellung | 582 |
| 9.1.3.2 | Haupteigenschaften der Eigenfunktionen und Eigenwerte | 583 |
| 9.1.3.3 | Entwicklung nach Eigenfunktionen | 584 |
| 9.1.3.4 | Singuläre Fälle | 584 |
| 9.2 | Partielle Differenzialgleichungen | 585 |
| 9.2.1 | Partielle Differenzialgleichungen 1. Ordnung | 585 |
| 9.2.1.1 | Lineare partielle Differenzialgleichungen 1. Ordnung | 585 |
| 9.2.1.2 | Nichtlineare partielle Differenzialgleichungen 1. Ordnung | 587 |
| 9.2.2 | Lineare partielle Differenzialgleichungen 2. Ordnung | 590 |
| 9.2.2.1 | Klassifikation und Eigenschaften der Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen | 590 |
| 9.2.2.2 | Klassifikation und Eigenschaften der Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen | 592 |
| 9.2.2.3 | Integrationsmethoden für lineare partielle Differenzialgleichungen 2. Ordnung | 593 |
| 9.2.3 | Partielle Differenzialgleichungen aus Naturwissenschaft und Technik | 603 |
| 9.2.3.1 | Problemstellungen und Randbedingungen | 603 |
| 9.2.3.2 | Wellengleichung | 605 |
| 9.2.3.3 | Wärmeleitungs- und Diffusionsgleichung für ein homogenes Medium | 606 |
| 9.2.3.4 | Potenzialgleichung | 607 |
| 9.2.4 | Schrödinger-Gleichung | 607 |
| 9.2.4.1 | Begriff der Schrödinger-Gleichung | 607 |
| 9.2.4.2 | Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung | 608 |
| 9.2.4.3 | Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung | 608 |
| 9.2.4.4 | Statistische Interpretation der Wellenfunktion | 609 |
| 9.2.4.5 | Kräftefreie Bewegung eines Teilchens in einem Quader | 611 |
| 9.2.4.6 | Teilchenbewegung im symmetrischen Zentralfeld | 613 |
| 9.2.4.7 | Linearer harmonischer Oszillator | 616 |
| 9.2.5 | Nichtlineare partielle Differenzialgleichungen: Solitonen, periodische Muster und Chaos | 619 |
| 9.2.5.1 | Physikalisch-mathematische Problemstellung | 619 |
| 9.2.5.2 | Korteweg-de-Vries-Gleichung | 620 |
| 9.2.5.3 | Nichtlineare Schrödinger-Gleichung | 621 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 9.2.5.4 | Sinus–Gordon–Gleichung | 622 |
| 9.2.5.5 | Weitere nichtlineare Evolutionsgleichungen mit Solitonlösungen | 624 |
| 10 | Variationsrechnung | 625 |
| 10.1 | Aufgabenstellung | 625 |
| 10.2 | Historische Aufgaben | 626 |
| 10.2.1 | Isoperimetrisches Problem | 626 |
| 10.2.2 | Brachistochronenproblem | 626 |
| 10.3 | Variationsaufgaben mit Funktionen einer Veränderlichen | 626 |
| 10.3.1 | Einfache Variationsaufgabe und Extremale | 626 |
| 10.3.2 | Eulersche Differenzialgleichung der Variationsrechnung | 627 |
| 10.3.3 | Variationsaufgaben mit Nebenbedingungen | 628 |
| 10.3.4 | Variationsaufgaben mit höheren Ableitungen | 629 |
| 10.3.5 | Variationsaufgaben mit mehreren gesuchten Funktionen | 630 |
| 10.3.6 | Variationsaufgaben in Parameterdarstellung | 630 |
| 10.4 | Variationsaufgaben mit Funktionen von mehreren Veränderlichen | 632 |
| 10.4.1 | Einfache Variationsaufgabe | 632 |
| 10.4.2 | Allgemeinere Variationsaufgaben | 633 |
| 10.5 | Numerische Lösung von Variationsaufgaben | 633 |
| 10.6 | Ergänzungen | 634 |
| 10.6.1 | Erste und zweite Variation | 634 |
| 10.6.2 | Anwendungen in der Physik | 635 |
| 11 | Lineare Integralgleichungen | 636 |
| 11.1 | Einführung und Klassifikation | 636 |
| 11.2 | Fredholmsche Integralgleichungen 2. Art | 637 |
| 11.2.1 | Integralgleichungen mit ausgearteten Kernen | 637 |
| 11.2.2 | Methode der sukzessiven Approximation, Neumann–Reihe | 640 |
| 11.2.3 | Fredholmsche Lösungsmethode, Fredholmsche Sätze | 642 |
| 11.2.3.1 | Fredholmsche Lösungsmethode | 642 |
| 11.2.3.2 | Fredholmsche Sätze | 644 |
| 11.2.4 | Numerische Verfahren für Fredholmsche Integralgleichungen 2. Art | 645 |
| 11.2.4.1 | Approximation des Integrals | 645 |
| 11.2.4.2 | Kernapproximation | 647 |
| 11.2.4.3 | Kollokationsmethode | 649 |
| 11.3 | Fredholmsche Integralgleichungen 1. Art | 651 |
| 11.3.1 | Integralgleichungen mit ausgearteten Kernen | 651 |
| 11.3.2 | Begriffe, analytische Grundlagen | 652 |
| 11.3.3 | Zurückführung der Integralgleichung auf ein lineares Gleichungssystem | 653 |
| 11.3.4 | Lösung der homogenen Integralgleichung 1. Art | 655 |
| 11.3.5 | Konstruktion zweier spezieller Orthonormalsysteme zu einem gegebenen Kern | 656 |
| 11.3.6 | Iteratives Verfahren | 657 |
| 11.4 | Volterrasche Integralgleichungen | 658 |
| 11.4.1 | Theoretische Grundlagen | 658 |
| 11.4.2 | Lösung durch Differenziation | 659 |
| 11.4.3 | Neumannsche Reihe zur Lösung der Volterraschen Integralgleichungen 2. Art | 660 |
| 11.4.4 | Volterrasche Integralgleichungen vom Faltungstyp | 661 |
| 11.4.5 | Numerische Behandlung Volterrascher Integralgleichungen 2. Art | 662 |
| 11.5 | Singuläre Integralgleichungen | 664 |
| 11.5.1 | Abelsche Integralgleichung | 664 |
| 11.5.2 | Singuläre Integralgleichungen mit Cauchy–Kernen | 665 |
| 11.5.2.1 | Formulierung der Aufgabe | 665 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 11.5.2.2 | Existenz einer Lösung | 666 |
| 11.5.2.3 | Eigenschaften des Cauchy–Integrals | 666 |
| 11.5.2.4 | Hilbertsches Randwertproblem | 666 |
| 11.5.2.5 | Lösung des Hilbertschen Randwertproblems | 667 |
| 11.5.2.6 | Lösung der charakteristischen Integralgleichung | 667 |
| 12 | Funktionalanalysis | 669 |
| 12.1 | Vektorräume | 669 |
| 12.1.1 | Begriff des Vektorraumes | 669 |
| 12.1.2 | Lineare und affin–lineare Teilmengen | 670 |
| 12.1.3 | Linear unabhängige Elemente | 672 |
| 12.1.4 | Konvexe Teilmengen und konvexe Hülle | 672 |
| 12.1.4.1 | Konvexe Mengen | 672 |
| 12.1.4.2 | Kegel | 673 |
| 12.1.5 | Lineare Operatoren und Funktionale | 673 |
| 12.1.5.1 | Abbildungen | 673 |
| 12.1.5.2 | Homomorphismus und Endomorphismus | 674 |
| 12.1.5.3 | Isomorphe Vektorräume | 674 |
| 12.1.6 | Komplexifikation reeller Vektorräume | 674 |
| 12.1.7 | Geordnete Vektorräume | 674 |
| 12.1.7.1 | Kegel und Halbordnung | 674 |
| 12.1.7.2 | Ordnungsbeschränkte Mengen | 675 |
| 12.1.7.3 | Positive Operatoren | 675 |
| 12.1.7.4 | Vektorverbände | 676 |
| 12.2 | Metrische Räume | 677 |
| 12.2.1 | Begriff des metrischen Raumes | 677 |
| 12.2.1.1 | Kugeln, Umgebungen und offene Mengen | 678 |
| 12.2.1.2 | Konvergenz von Folgen im metrischen Raum | 679 |
| 12.2.1.3 | Abgeschlossene Mengen und Abschließung | 679 |
| 12.2.1.4 | Dichte Teilmengen und separable metrische Räume | 680 |
| 12.2.2 | Vollständige metrische Räume | 680 |
| 12.2.2.1 | Cauchy–Folge | 680 |
| 12.2.2.2 | Vollständiger metrischer Raum | 681 |
| 12.2.2.3 | Einige fundamentale Sätze in vollständigen metrischen Räumen | 681 |
| 12.2.2.4 | Einige Anwendungen des Kontraktionsprinzips | 682 |
| 12.2.2.5 | Vervollständigung eines metrischen Raumes | 683 |
| 12.2.3 | Stetige Operatoren | 684 |
| 12.3 | Normierte Räume | 684 |
| 12.3.1 | Begriff des normierten Raumes | 684 |
| 12.3.1.1 | Axiome des normierten Raumes | 684 |
| 12.3.1.2 | Einige Eigenschaften normierter Räume | 685 |
| 12.3.2 | Banach–Räume | 685 |
| 12.3.2.1 | Reihen in normierten Räumen | 685 |
| 12.3.2.2 | Beispiele von Banach–Räumen | 685 |
| 12.3.2.3 | Sobolew–Räume | 686 |
| 12.3.3 | Geordnete normierte Räume | 686 |
| 12.3.4 | Normierte Algebren | 687 |
| 12.4 | Hilbert–Räume | 688 |
| 12.4.1 | Begriff des Hilbert–Raumes | 688 |
| 12.4.1.1 | Skalarprodukt | 688 |
| 12.4.1.2 | Unitäre Räume und einige ihrer Eigenschaften | 688 |
| 12.4.1.3 | Hilbert–Raum | 689 |

| | | |
|----------|---|-----|
| 12.4.2 | Orthogonalität | 689 |
| 12.4.2.1 | Eigenschaften der Orthogonalität | 689 |
| 12.4.2.2 | Orthogonale Systeme | 690 |
| 12.4.3 | Fourier-Reihen im Hilbert-Raum | 691 |
| 12.4.3.1 | Bestapproximation | 691 |
| 12.4.3.2 | Parsevalsche Gleichung, Satz von Riesz-Fischer | 691 |
| 12.4.4 | Existenz einer Basis. Isomorphe Hilbert-Räume | 692 |
| 12.5 | Stetige lineare Operatoren und Funktionale | 692 |
| 12.5.1 | Beschränktheit, Norm und Stetigkeit linearer Operatoren | 692 |
| 12.5.1.1 | Beschränktheit und Norm linearer Operatoren | 692 |
| 12.5.1.2 | Raum linearer stetiger Operatoren | 692 |
| 12.5.1.3 | Konvergenz von Operatorfolgen | 693 |
| 12.5.2 | Lineare stetige Operatoren in Banach-Räumen | 693 |
| 12.5.3 | Elemente der Spektraltheorie linearer Operatoren | 695 |
| 12.5.3.1 | Resolventenmenge und Resolvente eines Operators | 695 |
| 12.5.3.2 | Spektrum eines Operators | 695 |
| 12.5.4 | Stetige lineare Funktionale | 696 |
| 12.5.4.1 | Definition | 696 |
| 12.5.4.2 | Stetige lineare Funktionale im Hilbert-Raum, Satz von Riesz | 697 |
| 12.5.4.3 | Stetige lineare Funktionale in L^p | 697 |
| 12.5.5 | Fortsetzung von linearen Funktionalen | 697 |
| 12.5.6 | Trennung konvexer Mengen | 698 |
| 12.5.7 | Bidualer Raum und reflexive Räume | 699 |
| 12.6 | Adjungierte Operatoren in normierten Räumen | 699 |
| 12.6.1 | Adjungierter Operator zu einem beschränkten Operator | 699 |
| 12.6.2 | Adjungierter Operator zu einem unbeschränkten Operator | 700 |
| 12.6.3 | Selbstadjungierte Operatoren | 700 |
| 12.6.3.1 | Positiv definite Operatoren | 701 |
| 12.6.3.2 | Projektoren im Hilbert-Raum | 701 |
| 12.7 | Kompakte Mengen und kompakte Operatoren | 701 |
| 12.7.1 | Kompakte Teilmengen in normierten Räumen | 701 |
| 12.7.2 | Kompakte Operatoren | 701 |
| 12.7.2.1 | Begriff des kompakten Operators | 701 |
| 12.7.2.2 | Eigenschaften linearer kompakter Operatoren | 702 |
| 12.7.2.3 | Schwache Konvergenz von Elementen | 702 |
| 12.7.3 | Fredholmsche Alternative | 702 |
| 12.7.4 | Kompakte Operatoren im Hilbert-Raum | 703 |
| 12.7.5 | Kompakte selbstadjungierte Operatoren | 703 |
| 12.8 | Nichtlineare Operatoren | 703 |
| 12.8.1 | Beispiele nichtlinearer Operatoren | 704 |
| 12.8.2 | Differenzierbarkeit nichtlinearer Operatoren | 704 |
| 12.8.3 | Newton-Verfahren | 705 |
| 12.8.4 | Schaudersches Fixpunktprinzip | 706 |
| 12.8.5 | Leray-Schauder-Theorie | 706 |
| 12.8.6 | Positive nichtlineare Operatoren | 707 |
| 12.8.7 | Monotone Operatoren in Banach-Räumen | 708 |
| 12.9 | Maß und Lebesgue-Integral | 708 |
| 12.9.1 | Sigma-Algebren und Maße | 708 |
| 12.9.2 | Messbare Funktionen | 710 |
| 12.9.2.1 | Messbare Funktion | 710 |
| 12.9.2.2 | Eigenschaften der Klasse der messbaren Funktionen | 710 |

| | | |
|----------|--|-----|
| 12.9.3 | Integration | 710 |
| 12.9.3.1 | Definition des Integrals | 710 |
| 12.9.3.2 | Einige Eigenschaften des Integrals | 711 |
| 12.9.3.3 | Konvergenzsätze | 711 |
| 12.9.4 | L^p -Räume | 712 |
| 12.9.5 | Distributionen | 713 |
| 12.9.5.1 | Formel der partiellen Integration | 713 |
| 12.9.5.2 | Verallgemeinerte Ableitung | 713 |
| 12.9.5.3 | Distribution | 714 |
| 12.9.5.4 | Ableitung einer Distribution | 714 |

13 Vektoranalysis und Feldtheorie 716

| | | |
|----------|--|-----|
| 13.1 | Grundbegriffe der Feldtheorie | 716 |
| 13.1.1 | Vektorfunktion einer skalaren Variablen | 716 |
| 13.1.1.1 | Definitionen | 716 |
| 13.1.1.2 | Ableitung einer Vektorfunktion | 716 |
| 13.1.1.3 | Differenziationsregeln für Vektoren | 716 |
| 13.1.1.4 | Taylor-Entwicklung für Vektorfunktionen | 717 |
| 13.1.2 | Skalarfelder | 717 |
| 13.1.2.1 | Skalares Feld oder skalare Punktfunktion | 717 |
| 13.1.2.2 | Wichtige Fälle skalarer Felder | 717 |
| 13.1.2.3 | Koordinatendarstellung von Skalarfeldern | 718 |
| 13.1.2.4 | Niveauflächen und Niveaulinien | 718 |
| 13.1.3 | Vektorfelder | 719 |
| 13.1.3.1 | Vektorielles Feld oder vektorielle Punktfunktion | 719 |
| 13.1.3.2 | Wichtige Fälle vektorieller Felder | 719 |
| 13.1.3.3 | Koordinatendarstellung von Vektorfeldern | 720 |
| 13.1.3.4 | Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen | 721 |
| 13.1.3.5 | Feldlinien | 722 |
| 13.2 | Räumliche Differenzialoperationen | 723 |
| 13.2.1 | Richtungs- und Volumenableitung | 723 |
| 13.2.1.1 | Richtungsableitung eines skalaren Feldes | 723 |
| 13.2.1.2 | Richtungsableitung eines vektoriellen Feldes | 723 |
| 13.2.1.3 | Volumenableitung oder räumliche Ableitung | 724 |
| 13.2.2 | Gradient eines Skalarfeldes | 724 |
| 13.2.2.1 | Definition des Gradienten | 724 |
| 13.2.2.2 | Gradient und Richtungsableitung | 725 |
| 13.2.2.3 | Gradient und Volumenableitung | 725 |
| 13.2.2.4 | Weitere Eigenschaften des Gradienten | 725 |
| 13.2.2.5 | Gradient des Skalarfeldes in verschiedenen Koordinaten | 725 |
| 13.2.2.6 | Rechenregeln | 725 |
| 13.2.3 | Vektorgradient | 726 |
| 13.2.4 | Divergenz des Vektorfeldes | 726 |
| 13.2.4.1 | Definition der Divergenz | 726 |
| 13.2.4.2 | Divergenz in verschiedenen Koordinaten | 727 |
| 13.2.4.3 | Regeln zur Berechnung der Divergenz | 727 |
| 13.2.4.4 | Divergenz eines Zentralfeldes | 727 |
| 13.2.5 | Rotation des Vektorfeldes | 728 |
| 13.2.5.1 | Definitionen der Rotation | 728 |
| 13.2.5.2 | Rotation in verschiedenen Koordinaten | 728 |
| 13.2.5.3 | Regeln zur Berechnung der Rotation | 729 |
| 13.2.5.4 | Rotation des Potenzialfeldes | 729 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 13.2.6 | Nablaoperator, Laplace–Operator | 730 |
| 13.2.6.1 | Nablaoperator | 730 |
| 13.2.6.2 | Rechenregeln für den Nablaoperator | 730 |
| 13.2.6.3 | Vektorgradient | 731 |
| 13.2.6.4 | Zweifache Anwendung des Nablaoperators | 731 |
| 13.2.6.5 | Laplace–Operator | 731 |
| 13.2.7 | Übersicht zu den räumlichen Differenzialoperationen | 732 |
| 13.2.7.1 | Prinzipielle Verknüpfungen und Ergebnisse für Differenzialoperatoren | 732 |
| 13.2.7.2 | Rechenregeln für Differenzialoperatoren | 732 |
| 13.2.7.3 | Vektoranalytische Ausdrücke in kartesischen, Zylinder– und Kugelkoordinaten | 733 |
| 13.3 | Integration in Vektorfeldern | 733 |
| 13.3.1 | Kurvenintegral und Potenzial im Vektorfeld | 733 |
| 13.3.1.1 | Kurvenintegral im Vektorfeld | 733 |
| 13.3.1.2 | Bedeutung des Kurvenintegrals in der Mechanik | 735 |
| 13.3.1.3 | Eigenschaften des Kurvenintegrals | 735 |
| 13.3.1.4 | Kurvenintegral in kartesischen Koordinaten | 735 |
| 13.3.1.5 | Umlaufintegral in einem Vektorfeld | 735 |
| 13.3.1.6 | Konservatives oder Potenzialfeld | 735 |
| 13.3.2 | Oberflächenintegrale | 737 |
| 13.3.2.1 | Vektor eines ebenen Flächenstückes | 737 |
| 13.3.2.2 | Berechnung von Oberflächenintegralen | 737 |
| 13.3.2.3 | Oberflächenintegrale und Fluss von Feldern | 737 |
| 13.3.2.4 | Oberflächenintegrale in kartesischen Koordinaten als Oberflächenintegrale 2. Art | 738 |
| 13.3.3 | Integralsätze | 739 |
| 13.3.3.1 | Integralsatz und Integralformel von Gauß | 739 |
| 13.3.3.2 | Integralsatz von Stokes | 740 |
| 13.3.3.3 | Integralsätze von Green | 740 |
| 13.4 | Berechnung von Feldern | 741 |
| 13.4.1 | Reines Quellenfeld | 741 |
| 13.4.2 | Reines Wirbelfeld | 742 |
| 13.4.3 | Vektorfelder mit punktförmigen Quellen | 742 |
| 13.4.3.1 | Coulomb–Feld der Punktladung oder elektrostatisches Feld | 742 |
| 13.4.3.2 | Gravitationsfeld der Punktmasse | 743 |
| 13.4.4 | Superposition von Feldern | 743 |
| 13.4.4.1 | Diskrete Quellenverteilung | 743 |
| 13.4.4.2 | Kontinuierliche Quellenverteilung | 743 |
| 13.4.4.3 | Zusammenfassung | 743 |
| 13.5 | Differenzialgleichungen der Feldtheorie | 744 |
| 13.5.1 | Laplacesche Differenzialgleichung | 744 |
| 13.5.2 | Poissonsche Differenzialgleichung | 744 |
| 14 | Funktionentheorie | 745 |
| 14.1 | Funktionen einer komplexen Veränderlichen | 745 |
| 14.1.1 | Stetigkeit, Differenzierbarkeit | 745 |
| 14.1.1.1 | Definition der komplexen Funktion | 745 |
| 14.1.1.2 | Grenzwert der komplexen Funktion | 745 |
| 14.1.1.3 | Stetigkeit der komplexen Funktion | 745 |
| 14.1.1.4 | Differenzierbarkeit der komplexen Funktion | 745 |
| 14.1.2 | Analytische Funktionen | 746 |
| 14.1.2.1 | Definition der analytischen Funktion | 746 |

| | | |
|----------|--|-----|
| 14.1.2.2 | Beispiele analytischer Funktionen | 746 |
| 14.1.2.3 | Eigenschaften analytischer Funktionen | 746 |
| 14.1.2.4 | Singuläre Punkte | 747 |
| 14.1.3 | Konforme Abbildung | 748 |
| 14.1.3.1 | Begriff und Eigenschaften der konformen Abbildung | 748 |
| 14.1.3.2 | Einfachste konforme Abbildungen | 749 |
| 14.1.3.3 | Schwarzsches Spiegelungsprinzip | 755 |
| 14.1.3.4 | Komplexe Potenziale | 755 |
| 14.1.3.5 | Superpositionsprinzip | 757 |
| 14.1.3.6 | Beliebige Abbildung der komplexen Zahlenebene | 758 |
| 14.2 | Integration im Komplexen | 759 |
| 14.2.1 | Bestimmtes und unbestimmtes Integral | 759 |
| 14.2.1.1 | Definition des Integrals im Komplexen | 759 |
| 14.2.1.2 | Eigenschaften und Berechnung komplexer Integrale | 760 |
| 14.2.2 | Integralsatz von Cauchy, Hauptsatz der Funktionentheorie | 761 |
| 14.2.2.1 | Integralsatz von Cauchy für einfach zusammenhängende Gebiete | 761 |
| 14.2.2.2 | Integralsatz von Cauchy für mehrfach zusammenhängende Gebiete | 762 |
| 14.2.3 | Integralformeln von Cauchy | 762 |
| 14.2.3.1 | Analytische Funktion innerhalb eines Gebietes | 762 |
| 14.2.3.2 | Analytische Funktion außerhalb eines Gebietes | 763 |
| 14.3 | Potenzreihenentwicklung analytischer Funktionen | 763 |
| 14.3.1 | Konvergenz von Reihen mit komplexen Gliedern | 763 |
| 14.3.1.1 | Konvergenz einer Zahlenfolge mit komplexen Gliedern | 763 |
| 14.3.1.2 | Konvergenz einer unendlichen Reihe mit komplexen Gliedern | 763 |
| 14.3.1.3 | Potenzreihen im Komplexen | 764 |
| 14.3.2 | Taylor-Reihe | 765 |
| 14.3.3 | Prinzip der analytischen Fortsetzung | 765 |
| 14.3.4 | Laurent-Entwicklung | 766 |
| 14.3.5 | Isolierte singuläre Stellen und der Residuensatz | 766 |
| 14.3.5.1 | Isolierte singuläre Stellen | 766 |
| 14.3.5.2 | Meromorphe Funktionen | 767 |
| 14.3.5.3 | Elliptische Funktionen | 767 |
| 14.3.5.4 | Residuum | 767 |
| 14.3.5.5 | Residuensatz | 768 |
| 14.4 | Berechnung reeller Integrale durch Integration im Komplexen | 768 |
| 14.4.1 | Anwendung der Cauchyschen Integralformeln | 768 |
| 14.4.2 | Anwendung des Residuensatzes | 769 |
| 14.4.3 | Anwendungen des Lemmas von Jordan | 769 |
| 14.4.3.1 | Lemma von Jordan | 769 |
| 14.4.3.2 | Beispiele zum Lemma von Jordan | 770 |
| 14.5 | Algebraische und elementare transzendente Funktionen | 772 |
| 14.5.1 | Algebraische Funktionen | 772 |
| 14.5.2 | Elementare transzendente Funktionen | 772 |
| 14.5.3 | Beschreibung von Kurven in komplexer Form | 774 |
| 14.6 | Elliptische Funktionen | 776 |
| 14.6.1 | Zusammenhang mit elliptischen Integralen | 776 |
| 14.6.2 | Jacobische Funktionen | 778 |
| 14.6.3 | Thetafunktionen | 779 |
| 14.6.4 | Weierstrasssche Funktionen | 780 |
| 15 | Integraltransformationen | 781 |
| 15.1 | Begriff der Integraltransformation | 781 |
| 15.1.1 | Allgemeine Definition der Integraltransformationen | 781 |

| | | |
|----------|--|-----|
| 15.1.2 | Spezielle Integraltransformationen | 781 |
| 15.1.3 | Umkehrtransformationen | 781 |
| 15.1.4 | Linearität der Integraltransformationen | 783 |
| 15.1.5 | Integraltransformationen für Funktionen von mehreren Veränderlichen | 783 |
| 15.1.6 | Anwendungen der Integraltransformationen | 783 |
| 15.2 | Laplace-Transformation | 784 |
| 15.2.1 | Eigenschaften der Laplace-Transformation | 784 |
| 15.2.1.1 | Laplace-Transformierte, Original- und Bildbereich | 784 |
| 15.2.1.2 | Rechenregeln zur Laplace-Transformation | 785 |
| 15.2.1.3 | Bildfunktionen spezieller Funktionen | 788 |
| 15.2.1.4 | Diracsche Delta-Funktion und Distributionen | 791 |
| 15.2.2 | Rücktransformation in den Originalbereich | 792 |
| 15.2.2.1 | Rücktransformation mithilfe von Tabellen | 792 |
| 15.2.2.2 | Partialbruchzerlegung | 792 |
| 15.2.2.3 | Reihenentwicklungen | 793 |
| 15.2.2.4 | Umkehrintegral | 794 |
| 15.2.3 | Lösung von Differenzialgleichungen mithilfe der Laplace-Transformation | 795 |
| 15.2.3.1 | Gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten | 795 |
| 15.2.3.2 | Gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten | 796 |
| 15.2.3.3 | Partielle Differenzialgleichungen | 797 |
| 15.3 | Fourier-Transformation | 798 |
| 15.3.1 | Eigenschaften der Fourier-Transformation | 798 |
| 15.3.1.1 | Fourier-Integral | 798 |
| 15.3.1.2 | Fourier-Transformation und Umkehrtransformation | 799 |
| 15.3.1.3 | Rechenregeln zur Fourier-Transformation | 801 |
| 15.3.1.4 | Bildfunktionen spezieller Funktionen | 804 |
| 15.3.2 | Lösung von Differenzialgleichungen mithilfe der Fourier-Transformation | 805 |
| 15.3.2.1 | Gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen | 805 |
| 15.3.2.2 | Partielle Differenzialgleichungen | 806 |
| 15.4 | Z-Transformation | 807 |
| 15.4.1 | Eigenschaften der Z-Transformation | 808 |
| 15.4.1.1 | Diskrete Funktionen | 808 |
| 15.4.1.2 | Definition der Z-Transformation | 808 |
| 15.4.1.3 | Rechenregeln | 809 |
| 15.4.1.4 | Zusammenhang mit der Laplace-Transformation | 810 |
| 15.4.1.5 | Umkehrung der Z-Transformation | 811 |
| 15.4.2 | Anwendungen der Z-Transformation | 812 |
| 15.4.2.1 | Allgemeine Lösung linearer Differenzgleichungen | 812 |
| 15.4.2.2 | Differenzgleichung 2. Ordnung (Anfangswertaufgabe) | 813 |
| 15.4.2.3 | Differenzgleichung 2. Ordnung (Randwertaufgabe) | 814 |
| 15.5 | Wavelet-Transformation | 814 |
| 15.5.1 | Signale | 814 |
| 15.5.2 | Wavelets | 815 |
| 15.5.3 | Wavelet-Transformation | 816 |
| 15.5.4 | Diskrete Wavelet-Transformation | 817 |
| 15.5.4.1 | Schnelle Wavelet-Transformation | 817 |
| 15.5.4.2 | Diskrete Haar-Wavelet-Transformation | 817 |
| 15.5.5 | Gabor-Transformation | 817 |
| 15.6 | Walsh-Funktionen | 818 |
| 15.6.1 | Treppenfunktionen | 818 |
| 15.6.2 | Walsh-Systeme | 818 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 16 | Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik | 819 |
| 16.1 | Kombinatorik | 819 |
| 16.1.1 | Permutationen | 819 |
| 16.1.2 | Kombinationen | 819 |
| 16.1.3 | Variationen | 820 |
| 16.1.4 | Zusammenstellung der Formeln der Kombinatorik | 821 |
| 16.2 | Wahrscheinlichkeitsrechnung | 821 |
| 16.2.1 | Ereignisse, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten | 821 |
| 16.2.1.1 | Ereignisse | 821 |
| 16.2.1.2 | Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten | 822 |
| 16.2.1.3 | Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Satz von Bayes | 824 |
| 16.2.2 | Zufallsgrößen, Verteilungsfunktion | 825 |
| 16.2.2.1 | Zufallsveränderliche | 825 |
| 16.2.2.2 | Verteilungsfunktion | 825 |
| 16.2.2.3 | Erwartungswert und Streuung, Tschebyscheffsche Ungleichung | 827 |
| 16.2.2.4 | Mehrdimensionale Zufallsveränderliche | 828 |
| 16.2.3 | Diskrete Verteilungen | 828 |
| 16.2.3.1 | Binomialverteilung | 829 |
| 16.2.3.2 | Hypergeometrische Verteilung | 830 |
| 16.2.3.3 | Poisson-Verteilung | 831 |
| 16.2.4 | Stetige Verteilungen | 831 |
| 16.2.4.1 | Normalverteilung | 831 |
| 16.2.4.2 | Normierte Normalverteilung, Gaußsches Fehlerintegral | 833 |
| 16.2.4.3 | Logarithmische Normalverteilung | 833 |
| 16.2.4.4 | Exponentialverteilung | 834 |
| 16.2.4.5 | Weibull-Verteilung | 835 |
| 16.2.4.6 | χ^2 -Verteilung | 836 |
| 16.2.4.7 | Fisher-Verteilung | 836 |
| 16.2.4.8 | Student-Verteilung | 837 |
| 16.2.5 | Gesetze der großen Zahlen, Grenzwertsätze | 838 |
| 16.2.5.1 | Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli | 838 |
| 16.2.5.2 | Grenzwertsatz von Lindeberg-Levy | 839 |
| 16.2.6 | Stochastische Prozesse und stochastische Ketten | 839 |
| 16.2.6.1 | Grundbegriffe, Markoffsche Ketten | 839 |
| 16.2.6.2 | Poisson-Prozesse | 842 |
| 16.3 | Mathematische Statistik | 844 |
| 16.3.1 | Stichprobenfunktionen | 844 |
| 16.3.1.1 | Grundgesamtheit, Stichproben, Zufallsvektor | 844 |
| 16.3.1.2 | Stichprobenfunktionen | 845 |
| 16.3.2 | Beschreibende Statistik | 846 |
| 16.3.2.1 | Statistische Erfassung gegebener Messwerte | 846 |
| 16.3.2.2 | Statistische Parameter | 847 |
| 16.3.3 | Wichtige Prüfverfahren | 848 |
| 16.3.3.1 | Prüfen auf Normalverteilung | 848 |
| 16.3.3.2 | Verteilung der Stichprobenmittelwerte | 850 |
| 16.3.3.3 | Vertrauensgrenzen für den Mittelwert | 851 |
| 16.3.3.4 | Vertrauensgrenzen für die Streuung | 852 |
| 16.3.3.5 | Prinzip der Prüfverfahren | 853 |
| 16.3.4 | Korrelation und Regression | 853 |
| 16.3.4.1 | Lineare Korrelation bei zwei messbaren Merkmalen | 853 |
| 16.3.4.2 | Lineare Regression bei zwei messbaren Merkmalen | 854 |
| 16.3.4.3 | Mehrdimensionale Regression | 855 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 16.3.5 | Monte–Carlo–Methode | 857 |
| 16.3.5.1 | Simulation | 857 |
| 16.3.5.2 | Zufallszahlen | 857 |
| 16.3.5.3 | Beispiel für eine Monte–Carlo–Simulation | 859 |
| 16.3.5.4 | Anwendungen der Monte–Carlo–Methode in der numerischen Mathematik | 859 |
| 16.3.5.5 | Weitere Anwendungen der Monte–Carlo–Methode | 861 |
| 16.4 | Theorie der Messfehler | 862 |
| 16.4.1 | Messfehler und ihre Verteilung | 862 |
| 16.4.1.1 | Messfehlereinteilung nach qualitativen Merkmalen | 862 |
| 16.4.1.2 | Messfehlerverteilungsdichte | 862 |
| 16.4.1.3 | Messfehlereinteilung nach quantitativen Merkmalen | 864 |
| 16.4.1.4 | Angabe von Messergebnissen mit Fehlergrenzen | 867 |
| 16.4.1.5 | Fehlerrechnung für direkte Messungen gleicher Genauigkeit | 867 |
| 16.4.1.6 | Fehlerrechnung für direkte Messungen ungleicher Genauigkeit | 868 |
| 16.4.2 | Fehlerfortpflanzung und Fehleranalyse | 869 |
| 16.4.2.1 | Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz | 869 |
| 16.4.2.2 | Fehleranalyse | 870 |
| 17 | Dynamische Systeme und Chaos | 871 |
| 17.1 | Gewöhnliche Differenzialgleichungen und Abbildungen | 871 |
| 17.1.1 | Dynamische Systeme | 871 |
| 17.1.1.1 | Grundbegriffe | 871 |
| 17.1.1.2 | Invariante Mengen | 873 |
| 17.1.2 | Qualitative Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen | 874 |
| 17.1.2.1 | Existenz des Flusses und Phasenraumstruktur | 874 |
| 17.1.2.2 | Lineare Differenzialgleichungen | 875 |
| 17.1.2.3 | Stabilitätstheorie | 877 |
| 17.1.2.4 | Invariante Mannigfaltigkeiten | 880 |
| 17.1.2.5 | Poincaré–Abbildung | 884 |
| 17.1.2.6 | Topologische Äquivalenz von Differenzialgleichungen | 884 |
| 17.1.3 | Zeitdiskrete dynamische Systeme | 886 |
| 17.1.3.1 | Ruhelagen, periodische Orbits und Grenzmengen | 886 |
| 17.1.3.2 | Invariante Mannigfaltigkeiten | 886 |
| 17.1.3.3 | Topologische Konjugiertheit von zeitdiskreten Systemen | 887 |
| 17.1.4 | Strukturelle Stabilität (Robustheit) | 887 |
| 17.1.4.1 | Strukturstabile Differenzialgleichungen | 887 |
| 17.1.4.2 | Strukturstabile zeitdiskrete Systeme | 888 |
| 17.1.4.3 | Generische Eigenschaften | 889 |
| 17.2 | Quantitative Beschreibung von Attraktoren | 890 |
| 17.2.1 | Wahrscheinlichkeitsmaße auf Attraktoren | 890 |
| 17.2.1.1 | Invariantes Maß | 890 |
| 17.2.1.2 | Elemente der Ergodentheorie | 891 |
| 17.2.2 | Entropien | 893 |
| 17.2.2.1 | Topologische Entropie | 893 |
| 17.2.2.2 | Metrische Entropie | 893 |
| 17.2.3 | Lyapunov–Exponenten | 894 |
| 17.2.4 | Dimensionen | 895 |
| 17.2.4.1 | Metrische Dimensionen | 895 |
| 17.2.4.2 | Auf invariante Maße zurückgehende Dimensionen | 898 |
| 17.2.4.3 | Lokale Hausdorff–Dimension nach Douady–Oesterlé | 900 |
| 17.2.4.4 | Beispiele von Attraktoren | 900 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 17.2.5 | Seltame Attraktoren und Chaos | 902 |
| 17.2.6 | Chaos in eindimensionalen Abbildungen | 903 |
| 17.2.7 | Rekonstruktion der Dynamik aus Zeitreihen | 903 |
| | 17.2.7.1 Grundlagen, Rekonstruktionen mit generischen Eigenschaften . . . | 903 |
| | 17.2.7.2 Rekonstruktionen mit prävalenten Eigenschaften | 904 |
| 17.3 | Bifurkationstheorie und Wege zum Chaos | 906 |
| 17.3.1 | Bifurkationen in Morse–Smale–Systemen | 906 |
| | 17.3.1.1 Lokale Bifurkationen nahe Ruhelagen | 906 |
| | 17.3.1.2 Lokale Bifurkationen nahe einem periodischen Orbit | 911 |
| | 17.3.1.3 Globale Bifurkationen | 914 |
| 17.3.2 | Übergänge zum Chaos | 915 |
| | 17.3.2.1 Kaskade von Periodenverdopplungen | 915 |
| | 17.3.2.2 Intermittenz | 915 |
| | 17.3.2.3 Globale homokline Bifurkationen | 916 |
| | 17.3.2.4 Auflösung eines Torus | 918 |
| 18 | Optimierung | 923 |
| 18.1 | Lineare Optimierung | 923 |
| 18.1.1 | Problemstellung und geometrische Darstellung | 923 |
| | 18.1.1.1 Formen der linearen Optimierung | 923 |
| | 18.1.1.2 Beispiele und grafische Lösungen | 924 |
| 18.1.2 | Grundbegriffe der linearen Optimierung, Normalform | 925 |
| | 18.1.2.1 Ecke und Basis | 925 |
| | 18.1.2.2 Normalform der linearen Optimierungsaufgabe | 927 |
| 18.1.3 | Simplexverfahren | 928 |
| | 18.1.3.1 Simplextableau | 928 |
| | 18.1.3.2 Übergang zum neuen Simplextableau | 928 |
| | 18.1.3.3 Bestimmung eines ersten Simplextableaus | 930 |
| | 18.1.3.4 Revidiertes Simplexverfahren | 931 |
| | 18.1.3.5 Dualität in der linearen Optimierung | 932 |
| 18.1.4 | Spezielle lineare Optimierungsprobleme | 934 |
| | 18.1.4.1 Transportproblem | 934 |
| | 18.1.4.2 Zuordnungsproblem | 936 |
| | 18.1.4.3 Verteilungsproblem | 937 |
| | 18.1.4.4 Rundreiseproblem | 937 |
| | 18.1.4.5 Reihenfolgeproblem | 937 |
| 18.2 | Nichtlineare Optimierung | 938 |
| 18.2.1 | Problemstellung und theoretische Grundlagen | 938 |
| | 18.2.1.1 Problemstellung | 938 |
| | 18.2.1.2 Optimalitätsbedingungen | 938 |
| | 18.2.1.3 Dualität in der Optimierung | 939 |
| 18.2.2 | Spezielle nichtlineare Optimierungsaufgaben | 940 |
| | 18.2.2.1 Konvexe Optimierung | 940 |
| | 18.2.2.2 Quadratische Optimierung | 940 |
| 18.2.3 | Lösungsverfahren für quadratische Optimierungsaufgaben | 941 |
| | 18.2.3.1 Verfahren von Wolfe | 941 |
| | 18.2.3.2 Verfahren von Hildreth–d’Esopo | 943 |
| 18.2.4 | Numerische Suchverfahren | 943 |
| | 18.2.4.1 Eindimensionale Suche | 944 |
| | 18.2.4.2 Minimumsuche im n–dimensionalen euklidischen Vektorraum . . . | 944 |
| 18.2.5 | Verfahren für unrestringierte Aufgaben | 945 |
| | 18.2.5.1 Verfahren des steilsten Abstieges (Gradientenverfahren) | 945 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 18.2.5.2 | Anwendung des Newton–Verfahrens | 945 |
| 18.2.5.3 | Verfahren der konjugierten Gradienten | 946 |
| 18.2.5.4 | Verfahren von Davidon, Fletcher und Powell (DFP) | 946 |
| 18.2.6 | Evolutionsstrategien | 947 |
| 18.2.6.1 | Evolutionssprinzipien | 947 |
| 18.2.6.2 | Evolutionalgorithmus | 948 |
| 18.2.6.3 | Klassifizierung | 948 |
| 18.2.6.4 | Erzeugung von Zufallszahlen | 948 |
| 18.2.6.5 | Einsatzgebiete der Evolutionsstrategien | 948 |
| 18.2.6.6 | (1 + 1)–Mutations–Selektions–Strategie | 949 |
| 18.2.6.7 | Populationsstrategien | 949 |
| 18.2.7 | Gradientenverfahren für Probleme mit Ungleichungsrestriktionen | 951 |
| 18.2.7.1 | Aufgabenstellung und Voraussetzungen | 951 |
| 18.2.7.2 | Verfahren der zulässigen Richtungen | 951 |
| 18.2.7.3 | Verfahren der projizierten Gradienten | 953 |
| 18.2.8 | Straf– und Barriereverfahren | 955 |
| 18.2.8.1 | Strafverfahren | 955 |
| 18.2.8.2 | Barriereverfahren | 956 |
| 18.2.9 | Schnittebenenverfahren | 957 |
| 18.3 | Diskrete dynamische Optimierung | 958 |
| 18.3.1 | Diskrete dynamische Entscheidungsmodelle | 958 |
| 18.3.1.1 | n –stufige Entscheidungsprozesse | 958 |
| 18.3.1.2 | Dynamische Optimierungsprobleme | 958 |
| 18.3.2 | Beispiele diskreter Entscheidungsmodelle | 959 |
| 18.3.2.1 | Einkaufsproblem | 959 |
| 18.3.2.2 | Rucksackproblem | 959 |
| 18.3.3 | Bellmansche Funktionalgleichungen | 959 |
| 18.3.3.1 | Eigenschaften der Kostenfunktion | 959 |
| 18.3.3.2 | Formulierung der Funktionalgleichungen | 960 |
| 18.3.4 | Bellmansches Optimalitätsprinzip | 961 |
| 18.3.5 | Bellmansche Funktionalgleichungsmethode | 961 |
| 18.3.5.1 | Bestimmung der minimalen Kosten | 961 |
| 18.3.5.2 | Bestimmung der optimalen Politik | 961 |
| 18.3.6 | Beispiele zur Anwendung der Funktionalgleichungsmethode | 962 |
| 18.3.6.1 | Optimale Einkaufspolitik | 962 |
| 18.3.6.2 | Rucksackproblem | 963 |
| 19 | Numerische Mathematik | 964 |
| 19.1 | Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen mit einer Unbekannten | 964 |
| 19.1.1 | Iterationsverfahren | 964 |
| 19.1.1.1 | Gewöhnliches Iterationsverfahren | 964 |
| 19.1.1.2 | Newton–Verfahren | 965 |
| 19.1.1.3 | Regula falsi | 966 |
| 19.1.2 | Lösung von Polynomgleichungen | 967 |
| 19.1.2.1 | Horner–Schema | 967 |
| 19.1.2.2 | Lage der Nullstellen | 968 |
| 19.1.2.3 | Numerische Verfahren | 969 |
| 19.2 | Numerische Lösung von Gleichungssystemen | 970 |
| 19.2.1 | Lineare Gleichungssysteme | 970 |
| 19.2.1.1 | Dreieckszerlegung einer Matrix | 971 |
| 19.2.1.2 | Cholesky–Verfahren bei symmetrischer Koeffizientenmatrix | 973 |
| 19.2.1.3 | Orthogonalisierungsverfahren | 973 |
| 19.2.1.4 | Iteration in Gesamt- und Einzelschritten | 975 |

| | | |
|----------|---|------|
| 19.2.2 | Nichtlineare Gleichungssysteme | 976 |
| 19.2.2.1 | Gewöhnliches Iterationsverfahren | 976 |
| 19.2.2.2 | Newton–Verfahren | 977 |
| 19.2.2.3 | Ableitungsfreies Gauß–Newton–Verfahren | 977 |
| 19.3 | Numerische Integration | 978 |
| 19.3.1 | Allgemeine Quadraturformel | 978 |
| 19.3.2 | Interpolationsquadraturen | 979 |
| 19.3.2.1 | Rechteckformel | 979 |
| 19.3.2.2 | Trapezformel | 979 |
| 19.3.2.3 | Hermiteische Trapezformel | 980 |
| 19.3.2.4 | Simpson–Formel | 980 |
| 19.3.3 | Quadraturformeln vom Gauß–Typ | 980 |
| 19.3.3.1 | Gaußsche Quadraturformeln | 981 |
| 19.3.3.2 | Lobattosche Quadraturformeln | 981 |
| 19.3.4 | Verfahren von Romberg | 981 |
| 19.3.4.1 | Algorithmus des Romberg–Verfahrens | 982 |
| 19.3.4.2 | Extrapolationsprinzip | 982 |
| 19.4 | Genäherte Integration von gewöhnlichen Differenzialgleichungen | 984 |
| 19.4.1 | Anfangswertaufgaben | 984 |
| 19.4.1.1 | Eulersches Polygonzugverfahren | 984 |
| 19.4.1.2 | Runge–Kutta–Verfahren | 985 |
| 19.4.1.3 | Mehrschrittverfahren | 986 |
| 19.4.1.4 | Prediktor–Korrektor–Verfahren | 986 |
| 19.4.1.5 | Konvergenz, Konsistenz, Stabilität | 987 |
| 19.4.2 | Randwertaufgaben | 988 |
| 19.4.2.1 | Differenzenverfahren | 988 |
| 19.4.2.2 | Ansatzverfahren | 989 |
| 19.4.2.3 | Schießverfahren | 990 |
| 19.5 | Genäherte Integration von partiellen Differenzialgleichungen | 991 |
| 19.5.1 | Differenzenverfahren | 991 |
| 19.5.2 | Ansatzverfahren | 993 |
| 19.5.3 | Methode der finiten Elemente (FEM) | 994 |
| 19.6 | Approximation, Ausgleichsrechnung, Harmonische Analyse | 998 |
| 19.6.1 | Polynominterpolation | 998 |
| 19.6.1.1 | Newtonsche Interpolationsformel | 998 |
| 19.6.1.2 | Interpolationsformel nach Lagrange | 998 |
| 19.6.1.3 | Interpolation nach Aitken–Neville | 999 |
| 19.6.2 | Approximation im Mittel | 1000 |
| 19.6.2.1 | Stetige Aufgabe, Normalgleichungen | 1000 |
| 19.6.2.2 | Diskrete Aufgabe, Normalgleichungen, Householder–Verfahren | 1001 |
| 19.6.2.3 | Mehrdimensionale Aufgaben | 1002 |
| 19.6.2.4 | Nichtlineare Quadratmittelaufgaben | 1003 |
| 19.6.3 | Tschebyscheff–Approximation | 1004 |
| 19.6.3.1 | Aufgabenstellung und Alternantensatz | 1004 |
| 19.6.3.2 | Eigenschaften der Tschebyscheff–Polynome | 1004 |
| 19.6.3.3 | Remes–Algorithmus | 1006 |
| 19.6.3.4 | Diskrete Tschebyscheff–Approximation und Optimierung | 1006 |
| 19.6.4 | Harmonische Analyse | 1007 |
| 19.6.4.1 | Formeln zur trigonometrischen Interpolation | 1007 |
| 19.6.4.2 | Schnelle Fourier–Transformation (FFT) | 1008 |

| | | |
|-----------|---|-------------|
| 19.7 | Darstellung von Kurven und Flächen mithilfe von Splines | 1012 |
| 19.7.1 | Kubische Splines | 1012 |
| 19.7.1.1 | Interpolationssplines | 1012 |
| 19.7.1.2 | Ausgleichssplines | 1013 |
| 19.7.2 | Bikubische Splines | 1014 |
| 19.7.2.1 | Anwendung bikubischer Splines | 1014 |
| 19.7.2.2 | Bikubische Interpolationssplines | 1014 |
| 19.7.2.3 | Bikubische Ausgleichssplines | 1015 |
| 19.7.3 | Bernstein–Bézier–Darstellung von Kurven und Flächen | 1015 |
| 19.7.3.1 | Prinzip der B–B–Kurvendarstellung | 1016 |
| 19.7.3.2 | B–B–Flächendarstellung | 1017 |
| 19.8 | Nutzung von Computern | 1018 |
| 19.8.1 | Interne Zeichendarstellung | 1018 |
| 19.8.1.1 | Zahlensysteme | 1018 |
| 19.8.1.2 | Interne Zahlendarstellung | 1019 |
| 19.8.2 | Numerische Probleme beim Rechnen auf Computern | 1020 |
| 19.8.2.1 | Einführung, Fehlerarten | 1020 |
| 19.8.2.2 | Normalisierte Dezimalzahlen und Rundung | 1021 |
| 19.8.2.3 | Genauigkeitsfragen beim numerischen Rechnen | 1022 |
| 19.8.3 | Bibliotheken numerischer Verfahren | 1026 |
| 19.8.3.1 | NAG–Bibliothek | 1026 |
| 19.8.3.2 | IMSL–Bibliothek | 1027 |
| 19.8.3.3 | Aachener Bibliothek | 1028 |
| 19.8.4 | Anwendung von interaktiven Programmsystemen und Computeralgebrasystemen | 1028 |
| 19.8.4.1 | Matlab | 1028 |
| 19.8.4.2 | Mathematica | 1033 |
| 19.8.4.3 | Maple | 1037 |
| 20 | Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica | 1040 |
| 20.1 | Einführung | 1040 |
| 20.1.1 | Kurzcharakteristik von Computeralgebrasystemen | 1040 |
| 20.1.1.1 | Allgemeine Zielstellungen für Computeralgebrasysteme | 1040 |
| 20.1.1.2 | Beschränkung auf Mathematica | 1040 |
| 20.1.1.3 | Ein- und Ausgabe bei Mathematica | 1040 |
| 20.1.2 | Zwei einführende Beispiele für die Hauptanwendungsgebiete | 1041 |
| 20.1.2.1 | Formelmanipulation | 1041 |
| 20.1.2.2 | Numerische Berechnungen | 1041 |
| 20.2 | Wichtige Strukturelemente von Mathematica | 1042 |
| 20.2.1 | Hauptstrukturelemente | 1042 |
| 20.2.2 | Zahlenarten in Mathematica | 1043 |
| 20.2.2.1 | Grundtypen von Zahlen in Mathematica | 1043 |
| 20.2.2.2 | Spezielle Zahlen | 1043 |
| 20.2.2.3 | Darstellung und Konvertierung von Zahlen | 1043 |
| 20.2.3 | Wichtige Operatoren | 1044 |
| 20.2.4 | Listen | 1045 |
| 20.2.4.1 | Begriff und Bedeutung | 1045 |
| 20.2.4.2 | Verschachtelte Listen | 1045 |
| 20.2.4.3 | Operationen mit Listen | 1046 |
| 20.2.4.4 | Spezielle Listen | 1046 |
| 20.2.5 | Vektoren und Matrizen als Listen | 1047 |
| 20.2.5.1 | Aufstellung geeigneter Listen | 1047 |
| 20.2.5.2 | Operationen mit Matrizen und Vektoren | 1047 |

| | | |
|-----------|--|-------------|
| 20.2.6 | Funktionen | 1048 |
| 20.2.6.1 | Standardfunktionen | 1048 |
| 20.2.6.2 | Spezielle Funktionen | 1049 |
| 20.2.6.3 | Reine Funktionen | 1049 |
| 20.2.7 | Muster | 1049 |
| 20.2.8 | Funktionaloperationen | 1050 |
| 20.2.9 | Programmierung | 1051 |
| 20.2.10 | Ergänzungen zur Syntax, Informationen, Meldungen | 1052 |
| 20.2.10.1 | Kontexte, Attribute | 1052 |
| 20.2.10.2 | Informationen | 1053 |
| 20.2.10.3 | Meldungen | 1053 |
| 20.3 | Wichtige Anwendungsgebiete von Mathematica | 1053 |
| 20.3.1 | Manipulation algebraischer Ausdrücke | 1053 |
| 20.3.1.1 | Multiplikation von Ausdrücken | 1054 |
| 20.3.1.2 | Faktorzerlegung von Polynomen | 1054 |
| 20.3.1.3 | Operationen auf Polynomen | 1055 |
| 20.3.1.4 | Partialbruchzerlegung | 1055 |
| 20.3.1.5 | Manipulation nichtpolynomialer Ausdrücke | 1055 |
| 20.3.2 | Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen | 1056 |
| 20.3.2.1 | Gleichungen als logische Ausdrücke | 1056 |
| 20.3.2.2 | Lösung von Gleichungen | 1056 |
| 20.3.2.3 | Lösung transzendenter Gleichungen | 1057 |
| 20.3.2.4 | Lösung von Gleichungssystemen | 1057 |
| 20.3.3 | Lineare Gleichungssysteme und Eigenwertaufgaben | 1058 |
| 20.3.4 | Differenzial- und Integralrechnung | 1060 |
| 20.3.4.1 | Berechnung von Differenzialquotienten | 1060 |
| 20.3.4.2 | Unbestimmte Integrale | 1061 |
| 20.3.4.3 | Bestimmte Integrale, Mehrfachintegrale | 1062 |
| 20.3.4.4 | Lösung von Differenzialgleichungen | 1062 |
| 20.4 | Grafik mit Mathematica | 1063 |
| 20.4.1 | Grundlagen des Grafikaufbaus | 1063 |
| 20.4.2 | Grafik-Primitive | 1064 |
| 20.4.3 | Grafikoptionen | 1064 |
| 20.4.4 | Syntax der Grafikdarstellung | 1065 |
| 20.4.4.1 | Aufbau von Grafikobjekten | 1065 |
| 20.4.4.2 | Grafische Darstellung von Funktionen | 1066 |
| 20.4.5 | Zweidimensionale Kurven | 1067 |
| 20.4.5.1 | Exponentialfunktionen | 1067 |
| 20.4.5.2 | Funktion $y = x + \operatorname{Arcoth} x$ | 1067 |
| 20.4.5.3 | Bessel-Funktionen | 1068 |
| 20.4.6 | Parameterdarstellung von Kurven | 1068 |
| 20.4.7 | Darstellung von Flächen und Raumkurven | 1069 |
| 20.4.7.1 | Grafische Darstellung von Oberflächen | 1069 |
| 20.4.7.2 | Optionen für 3D-Grafik | 1069 |
| 20.4.7.3 | Dreidimensionale Objekte in Parameterdarstellung | 1070 |
| 21 | Tabellen | 1071 |
| 21.1 | Physikalische Einheiten im SI-System | 1071 |
| 21.2 | Dezimalvorsätze im SI-System | 1074 |
| 21.3 | Wichtige physikalische Konstanten | 1074 |
| 21.4 | Einige mathematische Konstanten und Zahlenwerte | 1075 |
| 21.5 | Wichtige Reihenentwicklungen | 1076 |

| | | |
|-----------|---|------|
| 21.6 | Fourier–Entwicklungen | 1081 |
| 21.7 | Unbestimmte Integrale | 1084 |
| 21.7.1 | Integrale rationaler Funktionen | 1084 |
| 21.7.1.1 | Integrale mit $X = ax + b$ | 1084 |
| 21.7.1.2 | Integrale mit $X = ax^2 + bx + c$ | 1086 |
| 21.7.1.3 | Integrale mit $X = a^2 \pm x^2$ | 1087 |
| 21.7.1.4 | Integrale mit $X = a^3 \pm x^3$ | 1089 |
| 21.7.1.5 | Integrale mit $X = a^4 + x^4$ | 1090 |
| 21.7.1.6 | Integrale mit $X = a^4 - x^4$ | 1090 |
| 21.7.1.7 | Einige Fälle der Partialbruchzerlegung | 1090 |
| 21.7.2 | Integrale irrationaler Funktionen | 1091 |
| 21.7.2.1 | Integrale mit \sqrt{x} und $a^2 \pm b^2x$ | 1091 |
| 21.7.2.2 | Andere Integrale mit \sqrt{x} | 1091 |
| 21.7.2.3 | Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ | 1091 |
| 21.7.2.4 | Integrale mit $\sqrt{ax + b}$ und $\sqrt{fx + g}$ | 1093 |
| 21.7.2.5 | Integrale mit $\sqrt{a^2 - x^2}$ | 1094 |
| 21.7.2.6 | Integrale mit $\sqrt{x^2 + a^2}$ | 1095 |
| 21.7.2.7 | Integrale mit $\sqrt{x^2 - a^2}$ | 1097 |
| 21.7.2.8 | Integrale mit $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ | 1099 |
| 21.7.2.9 | Integrale mit anderen irrationalen Ausdrücken | 1101 |
| 21.7.2.10 | Rekursionsformeln für Integral mit binomischem Differenzial | 1101 |
| 21.7.3 | Integrale trigonometrischer Funktionen | 1101 |
| 21.7.3.1 | Integrale mit Sinusfunktion | 1101 |
| 21.7.3.2 | Integrale mit Kosinusfunktion | 1104 |
| 21.7.3.3 | Integrale mit Sinus- und Kosinusfunktion | 1106 |
| 21.7.3.4 | Integrale mit Tangensfunktion | 1110 |
| 21.7.3.5 | Integrale mit Kotangensfunktion | 1110 |
| 21.7.4 | Integrale anderer transzendenter Funktionen | 1111 |
| 21.7.4.1 | Integrale mit Hyperbelfunktionen | 1111 |
| 21.7.4.2 | Integrale mit Exponentialfunktionen | 1112 |
| 21.7.4.3 | Integrale mit logarithmischen Funktionen | 1113 |
| 21.7.4.4 | Integrale mit inversen trigonometrischen Funktionen | 1115 |
| 21.7.4.5 | Integrale mit inversen Hyperbelfunktion | 1116 |
| 21.8 | Bestimmte Integrale | 1117 |
| 21.8.1 | Bestimmte Integrale trigonometrischer Funktionen | 1117 |
| 21.8.2 | Bestimmte Integrale von Exponentialfunktionen | 1118 |
| 21.8.3 | Bestimmte Integrale logarithmischer Funktionen | 1119 |
| 21.8.4 | Bestimmte Integrale algebraischer Funktionen | 1120 |
| 21.9 | Elliptische Integrale | 1122 |
| 21.9.1 | Elliptische Integrale 1. Gattung | 1122 |
| 21.9.2 | Elliptische Integrale 2. Gattung | 1122 |
| 21.9.3 | Vollständige elliptische Integrale K und E | 1123 |
| 21.10 | Gammafunktion | 1124 |
| 21.11 | Bessel–Funktionen (Zylinderfunktionen) | 1125 |
| 21.12 | Legendresche Polynome 1. Art (Kugelfunktionen) | 1127 |
| 21.13 | Laplace–Transformationen | 1128 |
| 21.14 | Fourier–Transformationen | 1134 |
| 21.14.1 | Fourier–Kosinus–Transformationen | 1134 |
| 21.14.2 | Fourier–Sinus–Transformationen | 1140 |
| 21.14.3 | Fourier–Transformationen | 1145 |
| 21.14.4 | Exponentielle Fourier–Transformationen | 1147 |

| | | |
|-----------|--|-------------|
| 21.15 | <i>Z</i> -Transformationen | 1148 |
| 21.16 | Poisson-Verteilung | 1151 |
| 21.17 | Normierte Normalverteilung | 1153 |
| 21.18 | χ^2 -Verteilung | 1155 |
| 21.19 | Fishersche <i>F</i> -Verteilung | 1156 |
| 21.20 | Studentsche <i>t</i> -Verteilung | 1158 |
| 21.21 | Zufallszahlen | 1159 |
| 22 | Literatur | 1160 |
| | Stichwortverzeichnis | 1177 |
| | Mathematische Zeichen | 1230 |

von Metapontum (450 v. u. Z.) am Pentagramm, das aus den Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks (s. 3.1.5.3, S. 142) gebildet wird, die irrationalen Zahlen entdeckt hat.

1.1.2 Beweismethoden

Im wesentlichen unterscheidet man drei Beweismethoden:

- direkter Beweis,
- indirekter Beweis,
- vollständige Induktion.

Außerdem spricht man noch vom konstruktiven Beweis.

1.1.2.1 Direkter Beweis

Es wird von einem bereits als richtig bewiesenen Satz (Voraussetzung p) ausgegangen und daraus die Wahrheit des zu beweisenden Satzes (Behauptung q) abgeleitet. Bei der logischen Schlussfolgerung wird vorwiegend die Implikation oder die Äquivalenz verwendet.

1. Direkter Beweis mithilfe der Implikation

In der *Implikation* $p \Rightarrow q$ folgt aus der Wahrheit der Voraussetzung die Wahrheit der Behauptung (s. 4. Zeile der Wahrheitstafel für die „Implikation“ 5.1.1, **3.**, S. 330).

■ Die Ungleichung $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ für $a > 0$, $b > 0$ ist zu beweisen. Voraussetzung ist die als richtig erkannte binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Daraus folgt durch Subtraktion von $4ab$: $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$; und aus dieser Ungleichung erhält man unmittelbar die Behauptung, wenn man sich beim Radizieren wegen $a > 0$ und $b > 0$ auf das positive Vorzeichen beschränkt.

2. Direkter Beweis mithilfe der Äquivalenz

Der Beweis wird durch *Verifizieren*, d. h. durch den Nachweis der Wahrheit, geführt. Man geht dabei von der Wahrheit der Behauptung q aus und zeigt die Wahrheit der Behauptung p , was allerdings nur bei einer *Äquivalenz* $p \Leftrightarrow q$ möglich ist. Praktisch bedeutet dies, dass alle Operationen, die q in p überführen, umkehrbar eindeutig sein müssen.

■ Die Ungleichung $1 + a + a^2 + \dots + a^n < \frac{1}{1-a}$ für $0 < a < 1$ ist zu beweisen.

Durch Multiplikation mit $1-a$ erhält man (wegen $1-a > 0$ bleibt das Ungleichheitszeichen bestehen, s. auch (1.102b)): $1-a+a-a^2+a^2-a^3 \pm \dots + a^n - a^{n+1} = 1-a^{n+1} < 1$.

Wegen $0 < a^{n+1} < 1$ ist die entstandene Ungleichung richtig, und da die durchgeführten Rechenoperationen umkehrbar eindeutig sind, ist auch die Ausgangsungleichung richtig.

1.1.2.2 Indirekter Beweis oder Beweis durch Widerspruch

Um die Behauptung q zu beweisen, geht man von der *Negation* \bar{q} aus und schließt von \bar{q} auf eine falsche Aussage r , d. h. $\bar{q} \Rightarrow r$ (s. auch 5.1.1, **7.**, S. 332). Dann muss aber auch \bar{q} falsch sein, da man bei der Implikation nur von einer falschen Voraussetzung zu einer falschen Behauptung kommt (s. 1. Zeile der Wahrheitstafel für die „Implikation“ 5.1.1, **3.**, S. 330). Wenn aber \bar{q} falsch ist, muss q wahr sein.

■ Es ist zu beweisen, dass die Zahl $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Angenommen, $\sqrt{2}$ sei rational. Also gilt $\sqrt{2} = a/b$ mit ganzen Zahlen a, b und $b \neq 0$, und man kann annehmen a, b sind *teilerfremd*, d. h., sie besitzen keinen gemeinsamen Teiler. Man erhält $(\sqrt{2})^2 = 2 = a^2/b^2$ oder $a^2 = 2b^2$, d. h., a^2 wäre eine gerade Zahl, was nur dann möglich ist, wenn $a = 2n$ eine gerade Zahl ist. Es müsste dann wegen $a^2 = 4n^2 = 2b^2$ auch b eine gerade Zahl sein. Das ist offensichtlich ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass a und b teilerfremd sind.

1.1.2.3 Vollständige Induktion

Mit dieser Beweismethode werden Sätze oder Formeln bewiesen, die von natürlichen Zahlen n abhängen. Das Prinzip der vollständigen Induktion lautet:

Ist eine Aussage für eine natürliche Zahl n_0 wahr, und folgt aus der Wahrheit der Aussage für eine

natürliche Zahl $n \geq n_0$ die Wahrheit der Aussage für $n + 1$, dann ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gültig. Danach erfolgt der Beweis in folgenden Schritten:

1. Induktionsanfang: Die Wahrheit der Aussage wird für $n = n_0$ gezeigt. Oft kann man $n_0 = 1$ wählen.

2. Induktionsannahme: Die Aussage ist für n wahr (Voraussetzung p).

3. Induktionsbehauptung: Die Aussage ist für $n + 1$ wahr (Behauptung q).

4. Beweis der Implikation: $p \Rightarrow q$.

Die Schritte **3.** und **4.** werden zusammengefasst und als *Induktionschluss* oder *Schluss von n auf $n + 1$* bezeichnet.

■ Es ist die Formel $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ zu beweisen.

Die einzelnen Schritte des Induktionsbeweises sind:

1. $n = 1$: $s_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$ ist offensichtlich richtig.

2. $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ sei wahr für $n \geq 1$.

3. Unter der Voraussetzung von **2.** ist zu zeigen: $s_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$.

4. Beweis: $s_{n+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = s_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.

1.1.2.4 Konstruktiver Beweis

In der Approximationstheorie z. B. wird der Beweis eines Existenzsatzes als *konstruktiv* bezeichnet, wenn er bei seiner Durchführung bereits Berechnungsvorschriften für eine Lösung liefert, die die Voraussetzungen des Existenzsatzes erfüllt.

■ Die Existenz einer natürlichen kubischen Interpolations-Spline-Funktion (s. 19.7.1.1, **1.**, S. 1012) kann wie folgt nachgewiesen werden: Man zeigt, dass die Berechnung der Spline-Koeffizienten aus den Voraussetzungen des Existenzsatzes auf ein tridiagonales lineares Gleichungssystem (s. 19.7.1.1, **2.**, S. 1013) führt, das eindeutig lösbar ist.

1.1.3 Summen und Produkte

1.1.3.1 Summen

1. Definition

Zur abkürzenden Schreibweise verwendet man für Summen das *Summenzeichen* \sum :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k. \quad (1.8)$$

Mit dieser Abkürzung wird eine Summe von n Summanden a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) bezeichnet. Man nennt k *Laufindex* oder *Summationsvariable*.

2. Rechenregeln

1. Summe gleicher Summanden, d. h., $a_k = a$ für $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\sum_{k=1}^n a_k = na. \quad (1.9a)$$

2. Multiplikation mit einem konstanten Faktor

$$\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k . \quad (1.9b)$$

3. Aufspalten einer Summe

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k \quad (1 < m < n) . \quad (1.9c)$$

4. Addition von Summen gleicher Länge

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k + c_k + \dots) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n c_k + \dots . \quad (1.9d)$$

5. Umnummerierung

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=m}^{m+n-1} a_{k-m+1} , \quad \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=l}^{n-m+l} a_{k+m-l} . \quad (1.9e)$$

6. Vertauschen der Summationsfolge bei Doppelsummen

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} \right) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} \right) . \quad (1.9f)$$

1.1.3.2 Produkte**1. Definition**

Zur abkürzenden Schreibweise verwendet man für Produkte das *Produktzeichen* \prod :

$$a_1 a_2 \dots a_n = \prod_{k=1}^n a_k . \quad (1.10)$$

Mit dieser Abkürzung wird ein Produkt von n Faktoren a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) bezeichnet, wobei k *Laufindex* genannt wird.

2. Rechenregeln

1. Produkt gleicher Faktoren, d. h., $a_k = a$ für $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\prod_{k=1}^n a_k = a^n . \quad (1.11a)$$

2. Vorziehen konstanter Faktoren

$$\prod_{k=1}^n (ca_k) = c^n \prod_{k=1}^n a_k . \quad (1.11b)$$

3. Aufspalten in Teilprodukte

$$\prod_{k=1}^n a_k = \left(\prod_{k=1}^m a_k \right) \left(\prod_{k=m+1}^n a_k \right) \quad (1 < m < n) . \quad (1.11c)$$

4. Produkt von Produkten

$$\prod_{k=1}^n a_k b_k c_k \dots = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \left(\prod_{k=1}^n b_k \right) \left(\prod_{k=1}^n c_k \right) \dots . \quad (1.11d)$$

5. Umnummerierung

$$\prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=m}^{m+n-1} a_{k-m+1} , \quad \prod_{k=m}^n a_k = \prod_{k=l}^{n-m+l} a_{k+m-l} . \quad (1.11e)$$

6. Vertauschen der Multiplikationsfolge bei Doppelprodukten

$$\prod_{i=1}^n \left(\prod_{k=1}^m a_{ik} \right) = \prod_{k=1}^m \left(\prod_{i=1}^n a_{ik} \right). \quad (1.11f)$$

1.1.4 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

1.1.4.1 Potenzen

Die Schreibweise a^x wird für die algebraische Operation des *Potenzierens* verwendet. Man bezeichnet a als *Basis*, x als *Exponent* und a^x als *Potenz*. Potenzen sind gemäß **Tabelle 1.1** definiert. Für die

Tabelle 1.1 Definition der Potenzen

| Basis a | Exponent x | Potenz a^x |
|--------------------------|---|--|
| beliebig reell, $\neq 0$ | 0 | 1 |
| | $n = 1, 2, 3, \dots$ | $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ (a hoch n) |
| | $n = -1, -2, -3, \dots$ | $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ |
| positiv reell | rational: $\frac{p}{q}$ (p, q ganz, $q > 0$) | $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ (q -te Wurzel aus a hoch p) |
| | irrational: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k}$ | $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{\frac{p_k}{q_k}}$ |
| 0 | positiv | 0 |

Potenzen gelten bei Beachtung der Definitionsbereiche für Basis und Exponent die folgenden **Rechenregeln**:

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad a^x : a^y = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (1.12) \quad a^x b^x = (ab)^x, \quad a^x : b^x = \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, \quad (1.13)$$

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}, \quad (1.14) \quad a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0). \quad (1.15)$$

Dabei ist $\ln a$ der natürliche Logarithmus von a und $e = 2,718281828459\dots$ seine Basis. Eine spezielle Potenz ist

$$(-1)^n = \begin{cases} +1, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -1, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (1.16)$$

Man beachte besonders: $a^0 = 1$ für $a \neq 0$.

1.1.4.2 Wurzeln

In Übereinstimmung mit **Tabelle 1.1** wird als n -te Wurzel aus a die positive Zahl

$$\sqrt[n]{a} \quad (a > 0, \text{ reell; } n > 0, \text{ ganz}) \quad (1.17a)$$

bezeichnet. Man spricht bei der Berechnung dieser Zahl vom *Radizieren* oder *Wurzelziehen* und nennt a den *Radikanden* und n den *Wurzelexponenten*. Die 2. und die 3. Wurzel werden auch *Quadratwurzel* bzw. *Kubikwurzel* genannt.

Für die Lösung der Gleichung

$$x^n = a \quad (a \text{ reell oder komplex; } n > 0, \text{ ganz}) \quad (1.17b)$$

wird häufig auch die Schreibweise $x = \sqrt[n]{a}$ verwendet, aber dann repräsentiert diese Darstellung n Werte x_k ($k = 1, 2, \dots, n$), die gemäß (1.141b), (s. 1.5.3.6, S. 39) zu berechnen sind.

■ **A:** Die Gleichung $x^2 = 4$ hat die zwei reellen Wurzeln $x_{1,2} = \pm 2$.

■ **B:** Die Gleichung $x^3 = -8$ hat die drei Wurzeln $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

1.1.4.3 Logarithmen

1. Definition Unter dem *Logarithmus* einer Zahl $x > 0$ zur *Basis* $b > 0$, $b \neq 1$, oder als Formel geschrieben $u = \log_b x$, wird der Exponent der Potenz verstanden, in die b zu erheben ist, um die Zahl x zu erhalten. Folglich ergibt sich aus der Gleichung

$$b^u = x \quad (1.18a) \quad \text{die Gleichung} \quad \log_b x = u, \quad (1.18b)$$

und umgekehrt folgt aus der zweiten die erste Gleichung. Speziell gilt

$$\log_b 1 = 0, \quad \log_b b = 1, \quad \log_b 0 = \begin{cases} -\infty & \text{für } b > 1, \\ +\infty & \text{für } b < 1. \end{cases} \quad (1.18c)$$

Zur Ausdehnung des Logarithmus auf negative Argumentwerte bedarf es der komplexen Zahlen. *Logarithmieren* einer gegebenen Größe bedeutet das Aufsuchen ihres Logarithmus. Man versteht darunter auch die Umwandlung logarithmischer Ausdrücke gemäß (1.19a, 1.19b). Das Aufsuchen einer Größe aus ihrem Logarithmus wird *Potenzieren* genannt.

2. Einige Eigenschaften der Logarithmen

1. Jede positive Zahl besitzt für jede beliebige positive Basis ihren Logarithmus, ausgenommen die Basis $b = 1$.

2. Für Logarithmen einer gemeinsamen Basis b gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\log(xy) = \log x + \log y, \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y, \quad (1.19a)$$

$$\log x^n = n \log x, \quad \text{speziell gilt } \log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x. \quad (1.19b)$$

■ Logarithmieren des Ausdrucks $\frac{3x^2 \sqrt[3]{y}}{2zu^3}$:

$$\log \frac{3x^2 \sqrt[3]{y}}{2zu^3} = \log(3x^2 \sqrt[3]{y}) - \log(2zu^3) = \log 3 + 2 \log x + \frac{1}{3} \log y - \log 2 - \log z - 3 \log u.$$

Um mit (1.19a, 1.19b) Summen und Differenzen zu logarithmieren, sind diese vorher, falls möglich, in Produkte oder Quotienten umzuwandeln.

Oft wird die inverse Umformung benötigt, d. h. die Darstellung eines Ausdrucks mit einigen Logarithmen verschiedener Größen in den Logarithmus eines einzigen Ausdrucks.

$$\log 3 + 2 \log x + \frac{1}{3} \log y - \log 2 - \log z - 3 \log u = \log \frac{3x^2 \sqrt[3]{y}}{2zu^3}.$$

3. Logarithmen verschiedener Basis sind zueinander proportional, so dass sich die Logarithmen zu einer Basis a über die Logarithmen zur Basis b berechnen lassen:

$$\log_a x = M \log_b x \quad \text{mit} \quad M = \log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \quad (1.20)$$

Man nennt M auch den *Transformationsmodul*.

1.1.4.4 Spezielle Logarithmen

1. **Logarithmen zur Basis 10** heißen *dekadische* oder *BRIGGSsche Logarithmen*. Man schreibt

$$\log_{10} x = \lg x, \quad \text{und es gilt} \quad \lg(x10^\alpha) = \alpha + \lg x. \quad (1.21)$$

2. **Logarithmen zur Basis e** heißen *natürliche* oder *NEPERSche Logarithmen*. Man schreibt

$$\log_e x = \ln x. \quad (1.22)$$

Der Modul zur Überführung der natürlichen in dekadische Logarithmen ist

$$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0,4342944819 \dots, \quad (1.23)$$

der zur Überführung der dekadischen in natürliche

$$M_1 = \frac{1}{M} = \ln 10 = 2,3025850930 \dots. \quad (1.24)$$

3. Logarithmen zur Basis 2 nennt man *Duallogarithmen* oder *binäre Logarithmen*. Man schreibt

$$\log_2 x = \text{ld } x \quad \text{oder} \quad \log_2 x = \text{lb } x. \quad (1.25)$$

4. Logarithmentafeln Die dekadischen und die natürlichen Logarithmen stehen in *Logarithmentafeln* zur Verfügung. Sie wurden früher mit Vorteil bei der numerischen Bildung von Potenzen oder zur Vereinfachung numerischer Multiplikationen und Divisionen verwendet. Am häufigsten wurden die dekadischen Logarithmen dazu benutzt. Heute sind die Logarithmentafeln durch die Taschenrechner und Personalcomputer weitgehend aus der rechnerischen Praxis verdrängt.

Jede Dezimalzahl, also jede reelle Zahl, in diesem Zusammenhang auch *Numerus* genannt, kann durch Vorziehen einer Zehnerpotenz 10^k mit ganzzahligem k in der Form

$$x = \hat{x}10^k \quad \text{mit} \quad 1 \leq \hat{x} < 10 \quad (1.26a)$$

halblogarithmisch dargestellt werden. Dabei ist \hat{x} durch die Ziffernfolge von x bestimmt, während 10^k die Größenordnung von x angibt. Somit wird

$$\lg x = k + \lg \hat{x} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \lg \hat{x} < 1, \quad \text{d. h.} \quad \lg \hat{x} = 0, \dots. \quad (1.26b)$$

Man nennt k die *Kennzahl* und die Ziffernfolge hinter dem Komma von $\lg \hat{x}$ die *Mantisse*. Letztere wird der Logarithmentafel entnommen.

■ $\lg 324 = 2,5105$, also Kennzahl 2, Mantisse 5105. Für die durch Multiplikation oder Division mit 10^n entstandenen Zahlen, z. B. 3240; 324000; 3,24; 0,0324, haben die Logarithmen die gleiche Mantisse, hier 5105, aber verschiedene Kennzahlen. Daher sind es die Mantissen, die in den *Logarithmentafeln* tabelliert sind. Beim Ablesen der Mantisse braucht weder auf die Stelle des Kommas noch auf die links oder rechts von der Zahl stehenden Nullen einschließlich der Null vor dem Komma geachtet zu werden. Diese gehen in die Bestimmung der Kennzahl k für einen bestimmten Numerus x ein.

5. Rechenschieber Neben den Logarithmen war der *Rechenschieber* eines der wichtigsten Hilfsmittel in der rechnerischen Praxis. Das Prinzip des Rechenschiebers beruht auf der Anwendung der Formel (1.19a), die es ermöglicht, Multiplikationen und Divisionen mithilfe von Additionen und Subtraktionen auszuführen. Daher sind auf dem Rechenschieber die Strecken im logarithmischen Maßstab abgetragen (s. Skalen- und Funktionspapiere 2.17.1, S. 117), sodass die genannten Rechenoperationen auf die Addition und Subtraktion von Strecken zurückgeführt werden können.

1.1.5 Algebraische Ausdrücke

1.1.5.1 Definitionen

1. Algebraischer Ausdruck oder *Term* werden eine oder mehrere algebraische Größen, wie Zahlen oder Buchstabensymbole, genannt, die durch Zeichen wie, +, -, ·, :, √ usw. sowie verschiedene Arten von Klammern zur Festlegung der Operationsfolge der algebraischen Operationen miteinander verknüpft sind.

2. Identität ist eine Gleichheitsbeziehung zwischen zwei algebraischen Ausdrücken, die beim Einsetzen beliebiger Zahlenwerte anstelle der darin aufgeführten Buchstabensymbole erhalten bleibt.

3. Gleichung nennt man eine Gleichheitsbeziehung zwischen zwei algebraischen Ausdrücken, wenn sich im Unterschied zur Identität nur einige spezielle Werte einsetzen lassen. So wird z. B. eine Gleichheitsbeziehung

$$F(x) = f(x) \quad (1.27)$$