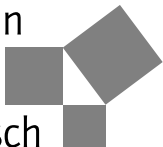


Tabelle 6.2 Differenziationsregeln (s. S. 450)

Regel	Formel für die Ableitung
Konstantenregel	$c' = 0 \quad (c \text{ const})$
Faktorregel	$(cu)' = cu' \quad (c \text{ const})$
Summenregel	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
Produktregel für zwei Funktionen	$(uv)' = u'v + uv'$
Produktregel für n Funktionen	$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = \sum_{i=1}^n u_1 \cdots u_i' \cdots u_n$
Quotientenregel	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$
Kettenregel für zwei Funktionen	$y = u(v(x)):$ $y' = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$
Kettenregel für drei Funktionen	$y = u(v(w(x))):$ $y' = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dw} \frac{dw}{dx}$
Potenzregel	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u' \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$ speziell: $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (u \neq 0)$
Logarithmische Differenziation	$\frac{d(\ln y(x))}{dx} = \frac{1}{y} y' \implies y' = y \frac{d(\ln y)}{dx}$ speziell: $(u^v)' = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right) \quad (u > 0)$
Differenziation der Umkehrfunktion	φ inverse Funktion zu f , d. h. $y = f(x) \iff x = \varphi(y)$: $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$ oder $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$
Implizite Differenziation	$F(x, y) = 0: F_x + F_y y' = 0$ oder $y' = -\frac{F_x}{F_y} \quad \left(F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, F_y = \frac{\partial F}{\partial y}; F_y \neq 0 \right)$
Ableitung in Parameterdarstellung	$x = x(t), y = y(t)$ (t Parameter): $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt} \right)$
Ableitung in Polarkoordinaten	$\rho = \rho(\varphi):$ $\begin{matrix} x = \rho(\varphi) \cos \varphi \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi \end{matrix}$ (Winkel φ als Parameter) $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi}{\dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi} \quad \left(\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi} \right)$

	Inhaltsverzeichnis	III	⇒
	Tabellenverzeichnis	XXXVII	⇒
1	Arithmetik	1	⇒
2	Funktionen und ihre Darstellung	49	⇒
3	Geometrie	132	⇒
4	Lineare Algebra	277	⇒
5	Algebra und Diskrete Mathematik	330	⇒
6	Differenzialrechnung	444	⇒
7	Unendliche Reihen	470	⇒
8	Integralrechnung	493	⇒
9	Differenzialgleichungen	553	⇒
10	Variationsrechnung	625	⇒
11	Lineare Integralgleichungen	636	⇒
12	Funktionalanalysis	669	⇒
13	Vektoranalysis und Feldtheorie	716	⇒
14	Funktionentheorie	745	⇒
15	Integraltransformationen	781	⇒
16	Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik	819	⇒
17	Dynamische Systeme und Chaos	871	⇒
18	Optimierung	923	⇒
19	Numerische Mathematik	964	⇒
20	Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica	1040	⇒
21	Tabellen	1071	⇒
22	Literatur	1160	⇒
	Stichwortverzeichnis	1177	⇒



Edition
Harri 
Deutsch 

Taschenbuch der Mathematik

von

I. N. Bronstein

K. A. Semendjajew

G. Musiol

H. Mühlig

12. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorf Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56702

Im Auftrag des Verlages Harri Deutsch erarbeitete und erweiterte Lizenzausgabe der bis 1977 erschienenen russischen Originalausgabe:

I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik für Ingenieure und Studenten
©FIZMATLIT, Moskau

12. Auflage 2026

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5972-7

Bei Fragen zur Produktsicherheit wenden Sie sich bitte an produktsicherheit@europa-lehrmittel.de.

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

© 2026 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Satz: Prof. Dr. G. Musiol, 01127 Dresden

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: Zimmermann Druck + Verlag GmbH, 58636 Iserlohn

Vorwort

Auch im Zeitalter der künstlichen Intelligenz bleibt der BRONSTEIN das Nachschlagewerk der Mathematik.

Das Taschenbuch enthält einen Querschnitt der Mathematik, wie er sowohl für Studenten als auch für praktisch tätige Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker sowie für die einschlägigen Hochschullehrer erforderlich ist. Dem traditionellen Anliegen des Buches – vorgegeben von den Erstautoren I. N. BRONSTEIN und K. A. SEMENDJAJEW (1937) – folgend, stehen Anschaulichkeit und leichte Verständlichkeit für den Ingenieur und Naturwissenschaftler im Vordergrund. So sind für diesen Nutzerkreis Grenzen der Anwendbarkeit und Hinweise auf Besonderheiten bei Anwendungen wichtiger als möglichst allgemeine Formulierungen und strenge mathematische Beweise. Für weitergehende Fragen wird jeweils auf die Fachliteratur verwiesen.

Der Einsatz einer zweiten Farbe seit der 11. Auflage trägt den geänderten Lesegewohnheiten Rechnung, erhöht die Übersichtlichkeit und erleichtert so das schnelle Auffinden der gesuchten Information.

Danksagung

Allen Lesern der deutschen und der zahlreichen fremdsprachigen Ausgaben des BRONSTEIN, allen Fachkollegen und Koautoren, die mit ihren Stellungnahmen, Bemerkungen, Anregungen und Zuarbeitungen zu den vorangegangenen Auflagen des Buches die Überarbeitung erleichtert haben, möchten wir an dieser Stelle unseren herzlichen Dank zum Ausdruck bringen.

Ebenso gilt unser Dank dem Verlag Europa-Lehrmittel, in dem der BRONSTEIN seit der 9. Auflage erscheint und insbesondere Herrn Dipl.-Phys. Klaus Horn für die seit vielen Auflagen bewährte gute Zusammenarbeit.

Herausgeber und Verlag

Koautoren

Einige Kapitel und Abschnitte sind in Zusammenarbeit mit Koautoren entstanden.

Kapitel bzw. Abschnitt	Koautor
Sphärische Trigonometrie (3.4.1 bis 3.4.3.3)	Dr. H. NICKEL †, Dresden
Sphärische Kurven (3.4.3.4)	Prof. L. MARSOLEK, Berlin
Geometrische Transformationen, Koordinatentransformationen, Planare Projektionen (3.5.4, 3.5.5)	Dr. I. STEINERT, Düsseldorf
Quaternionen und Anwendungen (4.4),	PD Dr. S. BERNSTEIN, Freiberg (Sachsen)
Logik (5.1), Mengenlehre (5.2), Klassische Algebraische Strukturen (5.3), Anwendungen von Gruppen (außer 5.3.4, 5.3.5.4 bis 5.3.5.6), Ringe und Körper (5.3.7), Vektorräume (5.3.8), BOOLEsche Algebra und Schaltalgebra (5.7), Universelle Algebra (5.6), Darstellung von Gruppen (5.3.4), weitere Anwendungen von Gruppen (5.3.5.4 bis 5.3.5.6)	Dr. J. BRUNNER, Dresden
LIE-Gruppen und LIE-Algebren (5.3.6)	Prof. Dr. R. REIF, Dresden
Zahlentheorie, Kryptologie, Graphen (5.4, 5.5, 5.8)	PD Dr. S. BERNSTEIN, Freiberg (Sachsen)
Fuzzy-Logik (5.9)	Prof. Dr. U. BAUMANN, Dresden
Wichtige Formeln für die Sphärischen BESSEL-Funktionen (9.1.2.5, 2, 5)	Prof. Dr. A. GRAUEL, Soest
Statistische Interpretation der Wellenfunktion (9.2.4.4)	Prof. Dr. P. ZIESCHE, Dresden
Nichtlineare partielle Differenzialgleichungen: Solitonen, periodische Muster und Chaos (9.2.5)	Prof. Dr. R. REIF, Dresden
Nichtlineare SCHRÖDINGER-Gleichung, Lösungen (9.2.5.3, 2)	Prof. Dr. P. ZIESCHE, Dresden
Integralgleichungen (11)	Dr. J. BRAND, Dresden
Funktionalanalysis (12)	Dr. I. STEINERT, Düsseldorf
Elliptische Funktionen (14.6)	Prof. Dr. M. WEBER, Dresden
Dynamische Systeme und Chaos (17)	Dr. N. M. FLEISCHER †, Moskau
Optimierung (18)	Prof. Dr. V. REITMANN, St. Petersburg
Nutzung von Computern: (19.8.1, 19.8.2), Interaktive Systeme: Mathematica (19.8.4.2), Maple (19.8.4.3), Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica (20)	Dr. I. STEINERT, Düsseldorf
Interaktive Systeme: Matlab (19.8.4.1)	Prof. Dr. G. FLACH, Dresden
Computeralgebrasysteme – Beispiel Mathematica (20): Anpassung an Mathematica 10	PD Dr. B. MULANSKY, Clausthal
	Dr. J. Tóth, Budapest

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

XXXVII

1	Arithmetik	1
1.1	Elementare Rechenregeln	1
1.1.1	Zahlen	1
1.1.1.1	Natürliche, ganze und rationale Zahlen	1
1.1.1.2	Irrationale und transzendente Zahlen	1
1.1.1.3	Reelle Zahlen	2
1.1.1.4	Kettenbrüche	3
1.1.1.5	Kommensurabilität	4
1.1.2	Beweismethoden	5
1.1.2.1	Direkter Beweis	5
1.1.2.2	Indirekter Beweis oder Beweis durch Widerspruch	5
1.1.2.3	Vollständige Induktion	5
1.1.2.4	Konstruktiver Beweis	6
1.1.3	Summen und Produkte	6
1.1.3.1	Summen	6
1.1.3.2	Produkte	7
1.1.4	Potenzen, Wurzeln, Logarithmen	8
1.1.4.1	Potenzen	8
1.1.4.2	Wurzeln	8
1.1.4.3	Logarithmen	9
1.1.4.4	Spezielle Logarithmen	9
1.1.5	Algebraische Ausdrücke	10
1.1.5.1	Definitionen	10
1.1.5.2	Einteilung der algebraischen Ausdrücke	11
1.1.6	Ganzrationale Ausdrücke	11
1.1.6.1	Darstellung in Form eines Polynoms	11
1.1.6.2	Zerlegung eines Polynoms in Faktoren	11
1.1.6.3	Spezielle Formeln	12
1.1.6.4	Binomischer Satz	12
1.1.6.5	Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Polynome	14
1.1.7	Gebrochenrationale Ausdrücke	14
1.1.7.1	Rückführung auf die einfachste Form	14
1.1.7.2	Bestimmung des ganzrationalen Anteils	15
1.1.7.3	Partialbruchzerlegung	15
1.1.7.4	Umformung von Proportionen	17
1.1.8	Irrationale Ausdrücke	17
1.2	Endliche Reihen	19
1.2.1	Definition der endlichen Reihe	19
1.2.2	Arithmetische Reihen	19
1.2.3	Geometrische Reihe	20
1.2.4	Spezielle endliche Reihen	20
1.2.5	Mittelwerte	20
1.2.5.1	Arithmetisches Mittel	20
1.2.5.2	Geometrisches Mittel	21
1.2.5.3	Harmonisches Mittel	21
1.2.5.4	Quadratisches Mittel	21
1.2.5.5	Vergleich der Mittelwerte für zwei positive Größen a und b	21

1.3	Finanzmathematik	22
1.3.1	Prozentrechnung	22
1.3.1.1	Prozent	22
1.3.1.2	Aufschlag	22
1.3.1.3	Abschlag oder Rabatt	22
1.3.2	Zinseszinsrechnung	23
1.3.2.1	Zinsen	23
1.3.2.2	Zinseszinsen	23
1.3.3	Tilgungsrechnung	24
1.3.3.1	Tilgung	24
1.3.3.2	Gleiche Tilgungsraten	24
1.3.3.3	Gleiche Annuitäten	25
1.3.4	Rentenrechnung	25
1.3.4.1	Rente	25
1.3.4.2	Nachschüssig konstante Rente	26
1.3.4.3	Kontostand nach n Rentenzahlungen	26
1.3.5	Abschreibungen	27
1.3.5.1	Abschreibungsarten	27
1.3.5.2	Lineare Abschreibung	27
1.3.5.3	Arithmetisch-degressive Abschreibung	27
1.3.5.4	Digitale Abschreibung	28
1.3.5.5	Geometrisch-degressive Abschreibung	28
1.3.5.6	Abschreibung mit verschiedenen Abschreibungsarten	29
1.4	Ungleichungen	29
1.4.1	Reine Ungleichungen	29
1.4.1.1	Definitionen	29
1.4.1.2	Eigenschaften der Ungleichungen vom Typ I und II	30
1.4.2	Spezielle Ungleichungen	31
1.4.2.1	Dreiecksungleichung für reelle Zahlen	31
1.4.2.2	Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen	31
1.4.2.3	Ungleichungen für den Absolutbetrag der Differenz zweier Zahlen	31
1.4.2.4	Ungleichung für das arithmetische und das geometrische Mittel	31
1.4.2.5	Ungleichung für das arithmetische und das quadratische Mittel	31
1.4.2.6	Ungleichungen für verschiedene Mittelwerte zweier reeller Zahlen	31
1.4.2.7	Bernoullische Ungleichung	32
1.4.2.8	Binomische Ungleichung	32
1.4.2.9	Cauchy-Schwarzsche Ungleichung	32
1.4.2.10	Tschebyscheffsche Ungleichung	32
1.4.2.11	Verallgemeinerte Tschebyscheffsche Ungleichung	33
1.4.2.12	Höldersche Ungleichung	33
1.4.2.13	Minkowskische Ungleichung	34
1.4.3	Lösung von Ungleichungen 1. und 2. Grades	34
1.4.3.1	Allgemeines	34
1.4.3.2	Ungleichungen 1. Grades	34
1.4.3.3	Ungleichungen 2. Grades	34
1.4.3.4	Allgemeiner Fall der Ungleichung 2. Grades	35
1.5	Komplexe Zahlen	35
1.5.1	Imaginäre und komplexe Zahlen	35
1.5.1.1	Imaginäre Einheit	35
1.5.1.2	Komplexe Zahlen	35
1.5.2	Geometrische Darstellung	36
1.5.2.1	Vektordarstellung	36

1.5.2.2	Gleichheit komplexer Zahlen	36
1.5.2.3	Trigonometrische Form der komplexen Zahlen	36
1.5.2.4	Exponentialform einer komplexen Zahl	37
1.5.2.5	Konjugiert komplexe Zahlen	37
1.5.3	Rechnen mit komplexen Zahlen	37
1.5.3.1	Addition und Subtraktion	37
1.5.3.2	Multiplikation	38
1.5.3.3	Division	38
1.5.3.4	Allgemeine Regeln für die vier Grundrechenarten	39
1.5.3.5	Potenzieren einer komplexen Zahl	39
1.5.3.6	Radizieren oder Ziehen der n -ten Wurzel aus einer komplexen Zahl	39
1.6	Algebraische und transzendente Gleichungen	39
1.6.1	Umformung algebraischer Gleichungen auf die Normalform	39
1.6.1.1	Definitionen	39
1.6.1.2	Systeme aus n algebraischen Gleichungen	40
1.6.1.3	Scheinbare Wurzeln	40
1.6.2	Gleichungen 1. bis 4. Grades	41
1.6.2.1	Gleichungen 1. Grades (lineare Gleichungen)	41
1.6.2.2	Gleichungen 2. Grades (quadratische Gleichungen)	41
1.6.2.3	Gleichungen 3. Grades (kubische Gleichungen)	42
1.6.2.4	Gleichungen 4. Grades	44
1.6.2.5	Gleichungen 5. und höheren Grades	45
1.6.3	Gleichungen n -ten Grades	45
1.6.3.1	Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen	45
1.6.3.2	Gleichungen mit reellen Koeffizienten	46
1.6.4	Rückführung transzendenter Gleichungen auf algebraische Gleichungen	47
1.6.4.1	Definition	47
1.6.4.2	Exponentialgleichungen	47
1.6.4.3	Logarithmische Gleichungen	48
1.6.4.4	Trigonometrische Gleichungen	48
1.6.4.5	Gleichungen mit Hyperbelfunktionen	48
2	Funktionen und ihre Darstellung	49
2.1	Funktionsbegriff	49
2.1.1	Definition der Funktion	49
2.1.1.1	Funktion	49
2.1.1.2	Reelle Funktion	49
2.1.1.3	Funktion von mehreren Veränderlichen	49
2.1.1.4	Komplexe Funktion	49
2.1.1.5	Weitere Funktionen	49
2.1.1.6	Funktionale	49
2.1.1.7	Funktion und Abbildung	50
2.1.2	Methoden zur Definition einer reellen Funktion	50
2.1.2.1	Angabe einer Funktion	50
2.1.2.2	Analytische Darstellung reeller Funktionen	50
2.1.3	Einige Funktionstypen	51
2.1.3.1	Monotone Funktionen	51
2.1.3.2	Beschränkte Funktionen	52
2.1.3.3	Extremwerte von Funktionen	52
2.1.3.4	Gerade Funktionen	52
2.1.3.5	Ungerade Funktionen	52
2.1.3.6	Darstellung mithilfe gerader und ungerader Funktionen	53

2.1.3.7	Periodische Funktionen	53
2.1.3.8	Inverse oder Umkehrfunktionen	53
2.1.4	Grenzwert von Funktionen	54
2.1.4.1	Definition des Grenzwertes einer Funktion	54
2.1.4.2	Zurückführung auf den Grenzwert einer Folge	54
2.1.4.3	Konvergenzkriterium von Cauchy	54
2.1.4.4	Unendlicher Grenzwert einer Funktion	55
2.1.4.5	Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert einer Funktion	55
2.1.4.6	Grenzwert einer Funktion für x gegen unendlich	55
2.1.4.7	Sätze über Grenzwerte von Funktionen	56
2.1.4.8	Berechnung von Grenzwerten	56
2.1.4.9	Größenordnung von Funktionen und Landau-Symbole	58
2.1.5	Stetigkeit einer Funktion	59
2.1.5.1	Stetigkeit und Unstetigkeitsstelle	59
2.1.5.2	Definition der Stetigkeit	60
2.1.5.3	Häufig auftretende Arten von Unstetigkeiten	60
2.1.5.4	Stetigkeit und Unstetigkeitspunkte elementarer Funktionen	61
2.1.5.5	Eigenschaften stetiger Funktionen	62
2.2	Elementare Funktionen	63
2.2.1	Algebraische Funktionen	63
2.2.1.1	Ganzrationale Funktionen (Polynome)	63
2.2.1.2	Gebrochenrationale Funktionen	63
2.2.1.3	Irrationale Funktionen	64
2.2.2	Transzendente Funktionen	64
2.2.2.1	Exponentialfunktionen	64
2.2.2.2	Logarithmische Funktionen	64
2.2.2.3	Trigonometrische Funktionen	64
2.2.2.4	Inverse trigonometrische Funktionen	64
2.2.2.5	Hyperbelfunktionen	64
2.2.2.6	Inverse Hyperbelfunktionen	64
2.2.3	Zusammengesetzte Funktionen	64
2.3	Polynome	65
2.3.1	Lineare Funktion	65
2.3.2	Quadratisches Polynom	65
2.3.3	Polynom 3. Grades	65
2.3.4	Polynom n -ten Grades	66
2.3.5	Parabel n -ter Ordnung	66
2.4	Gebrochenrationale Funktionen	67
2.4.1	Spezielle gebrochen lineare Funktion	67
2.4.2	Gebrochenlineare Funktion	67
2.4.3	Kurve 3. Ordnung, Typ I	68
2.4.4	Kurve 3. Ordnung, Typ II	68
2.4.5	Kurve 3. Ordnung, Typ III	69
2.4.6	Reziproke Potenz	71
2.5	Irrationale Funktionen	72
2.5.1	Quadratwurzel aus einem linearen Binom	72
2.5.2	Quadratwurzel aus einem quadratischen Polynom	72
2.5.3	Potenzfunktion	72
2.6	Exponentialfunktionen und logarithmische Funktionen	73
2.6.1	Exponentialfunktion	73
2.6.2	Logarithmische Funktionen	73
2.6.3	Gaußsche Glockenkurve	74

2.6.4	Exponentialsumme	74
2.6.5	Verallgemeinerte Gaußsche Glockenkurve	76
2.6.6	Produkt aus Potenz- und Exponentialfunktion	76
2.7	Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen)	77
2.7.1	Grundlagen	77
2.7.1.1	Definition und Darstellung	77
2.7.1.2	Wertebereiche und Funktionsverläufe	79
2.7.2	Wichtige Formeln für trigonometrische Funktionen	81
2.7.2.1	Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	81
2.7.2.2	Trigonometrische Funktionen der Summe und der Differenz zweier Winkel (Additionstheoreme)	81
2.7.2.3	Trigonometrische Funktionen für Winkelvielfache	82
2.7.2.4	Trigonometrische Funktionen des halben Winkels	83
2.7.2.5	Summen und Differenzen zweier trigonometrischer Funktionen	83
2.7.2.6	Produkte trigonometrischer Funktionen	83
2.7.2.7	Potenzen trigonometrischer Funktionen	84
2.7.3	Beschreibung von Schwingungen	84
2.7.3.1	Problemstellung	84
2.7.3.2	Superposition oder Überlagerung von Schwingungen	84
2.7.3.3	Vektordiagramm für Schwingungen	85
2.7.3.4	Dämpfung von Schwingungen	85
2.8	Zyklometrische Funktionen (Arkusfunktionen)	86
2.8.1	Definition der zyklometrischen Funktionen	86
2.8.2	Zurückführung auf die Hauptwerte	86
2.8.3	Beziehungen zwischen den Hauptwerten	87
2.8.4	Formeln für negative Argumente	88
2.8.5	Summe und Differenz von $\arcsin x$ und $\arcsin y$	88
2.8.6	Summe und Differenz von $\arccos x$ und $\arccos y$	88
2.8.7	Summe und Differenz von $\arctan x$ und $\arctan y$	88
2.8.8	Spezielle Beziehungen für $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$	89
2.9	Hyperbelfunktionen	89
2.9.1	Definition der Hyperbelfunktionen	89
2.9.2	Grafische Darstellung der Hyperbelfunktionen	90
2.9.2.1	Hyperbelsinus	90
2.9.2.2	Hyperbelkosinus	90
2.9.2.3	Hyperbeltangens	91
2.9.2.4	Hyperbelkotangens	91
2.9.3	Wichtige Formeln für Hyperbelfunktionen	91
2.9.3.1	Hyperbelfunktionen einer Variablen	91
2.9.3.2	Darstellung einer Hyperbelfunktion durch eine andere gleichen Argumentes	91
2.9.3.3	Formeln für negative Argumente	91
2.9.3.4	Hyperbelfunktionen der Summe und der Differenz zweier Argumente (Additionstheoreme)	92
2.9.3.5	Hyperbelfunktionen des doppelten Arguments	92
2.9.3.6	Formel von Moivre für Hyperbelfunktionen	92
2.9.3.7	Hyperbelfunktionen des halben Arguments	92
2.9.3.8	Summen und Differenzen von Hyperbelfunktionen	92
2.9.3.9	Zusammenhang zwischen den Hyperbel- und den trigonometrischen Funktionen mithilfe komplexer Argumente	93
2.10	Areafunktionen	93
2.10.1	Definitionen	93
2.10.1.1	Areasinus	93

	2.10.1.2 Areakosinus	93
	2.10.1.3 Areatangens	93
	2.10.1.4 Areakotangens	93
	2.10.2 Darstellung der Areafunktionen durch den natürlichen Logarithmus	94
	2.10.3 Beziehungen zwischen den verschiedenen Areafunktionen	95
	2.10.4 Summen und Differenzen von Areafunktionen	95
	2.10.5 Formeln für negative Argumente	95
2.11	Kurven dritter Ordnung	95
	2.11.1 Semikubische Parabel	95
	2.11.2 Versiera der Agnesi	96
	2.11.3 Kartesisches Blatt	96
	2.11.4 Zissoide	97
	2.11.5 Strophoide	97
2.12	Kurven vierter Ordnung	98
	2.12.1 Konchoide des Nikomedes	98
	2.12.2 Allgemeine Konchoide	99
	2.12.3 Pascalsche Schnecke	99
	2.12.4 Kardioide	100
	2.12.5 Cassinische Kurven	101
	2.12.6 Lemniskate	102
2.13	Zykloiden	102
	2.13.1 Gewöhnliche Zykloide	102
	2.13.2 Verlängerte und verkürzte Zykloiden oder Trochoiden	102
	2.13.3 Epizykloide	103
	2.13.4 Hypozykloide und Astroide	104
	2.13.5 Verlängerte und verkürzte Epizykloide und Hypozykloide	106
2.14	Spiralen	106
	2.14.1 Archimedische Spirale	106
	2.14.2 Hyperbolische Spirale	107
	2.14.3 Logarithmische Spirale	107
	2.14.4 Evolvente des Kreises	107
	2.14.5 Klothoide	108
2.15	Verschiedene andere Kurven	108
	2.15.1 Kettenlinie oder Katenoide	108
	2.15.2 Schleppkurve oder Traktrix	108
2.16	Aufstellung empirischer Kurven	110
	2.16.1 Verfahrensweise	110
	2.16.1.1 Kurvenbildervergleiche	110
	2.16.1.2 Rektifizierung	110
	2.16.1.3 Parameterbestimmung	110
	2.16.2 Gebräuchlichste empirische Formeln	111
	2.16.2.1 Potenzfunktionen	111
	2.16.2.2 Exponentialfunktionen	111
	2.16.2.3 Quadratisches Polynom	112
	2.16.2.4 Gebrochenlineare Funktion	113
	2.16.2.5 Quadratwurzel aus einem quadratischen Polynom	113
	2.16.2.6 Verallgemeinerte Gaußsche Glockenkurve	114
	2.16.2.7 Kurve 3. Ordnung, Typ II	114
	2.16.2.8 Kurve 3. Ordnung, Typ III	114
	2.16.2.9 Kurve 3. Ordnung, Typ I	114
	2.16.2.10 Produkt aus Potenz- und Exponentialfunktion	115

2.16.2.11	Exponentialsumme	115
2.16.2.12	Vollständig durchgerechnetes Beispiel	116
2.17	Skalen und Funktionspapiere	117
2.17.1	Skalen	117
2.17.2	Funktionspapiere	119
2.17.2.1	Einfach-logarithmisches Funktionspapier	119
2.17.2.2	Doppelt-logarithmisches Funktionspapier	119
2.17.2.3	Funktionspapier mit einer reziproken Skala	119
2.17.2.4	Digitale Umsetzung	120
2.18	Funktionen von mehreren Veränderlichen	121
2.18.1	Definition und Darstellung	121
2.18.1.1	Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher	121
2.18.1.2	Geometrische Darstellung von Funktionen mehrerer Veränderlicher	121
2.18.2	Verschiedene ebene Definitionsbereiche	122
2.18.2.1	Definitionsbereich einer durch eine Menge gegebenen Funktion	122
2.18.2.2	Zweidimensionale Gebiete	122
2.18.2.3	Drei- und mehrdimensionale Gebiete	122
2.18.2.4	Methoden zur Definition einer Funktion	122
2.18.2.5	Formen der analytischen Darstellung einer Funktion	124
2.18.2.6	Homogene Funktion	125
2.18.2.7	Abhängigkeit von Funktionen	125
2.18.3	Grenzwerte	126
2.18.3.1	Definition	126
2.18.3.2	Exakte Formulierung	126
2.18.3.3	Verallgemeinerung auf mehrere Veränderliche	126
2.18.3.4	Iterierte Grenzwerte	126
2.18.4	Stetigkeit	127
2.18.5	Eigenschaften stetiger Funktionen	127
2.18.5.1	Nullstellensatz von Bolzano	127
2.18.5.2	Zwischenwertsatz	127
2.18.5.3	Satz über die Beschränktheit einer Funktion	127
2.18.5.4	Satz von Weierstrass über die Existenz des größten und kleinsten Funktionswertes	127
2.19	Nomographie	128
2.19.1	Nomogramme	128
2.19.2	Netztafeln	128
2.19.3	Fluchtlinientafeln	129
2.19.3.1	Fluchtlinientafeln mit drei geraden Skalen durch einen Punkt	129
2.19.3.2	Fluchtlinientafeln mit zwei parallelen und einer dazu geneigten geradlinigen Skala	130
2.19.3.3	Fluchtlinientafeln mit zwei parallelen, geradlinigen Skalen und einer Kurvenskala	130
2.19.4	Netztafeln für mehr als drei Veränderliche	131
3	Geometrie	132
3.1	Planimetrie	132
3.1.1	Grundbegriffe	132
3.1.1.1	Punkt, Gerade, Strahl, Strecke	132
3.1.1.2	Winkel	132
3.1.1.3	Winkel an zwei sich schneidenden Geraden	133
3.1.1.4	Winkelpaare an geschnittenen Parallelen	133
3.1.1.5	Winkel im Gradmaß und im Bogenmaß	134

3.1.2	Geometrische Definition der Kreis- und Hyperbel-Funktionen	134
3.1.2.1	Definition der Kreis- oder trigonometrischen Funktionen	134
3.1.2.2	Definition der Hyperbelfunktionen	135
3.1.3	Ebene Dreiecke	136
3.1.3.1	Aussagen zu ebenen Dreiecken	136
3.1.3.2	Symmetrie	137
3.1.4	Ebene Vierecke	139
3.1.4.1	Parallelogramm	139
3.1.4.2	Rechteck und Quadrat	139
3.1.4.3	Rhombus oder Raute	139
3.1.4.4	Trapez	139
3.1.4.5	Allgemeines Viereck	140
3.1.4.6	Sehnenviereck	140
3.1.4.7	Tangentenviereck	141
3.1.5	Ebene Vielecke oder Polygone	141
3.1.5.1	Allgemeines Vieleck	141
3.1.5.2	Regelmäßige konvexe Vielecke	141
3.1.5.3	Einige regelmäßige konvexe Vielecke	142
3.1.6	Ebene Kreisfiguren	143
3.1.6.1	Kreis	143
3.1.6.2	Kreisabschnitt (Kreissegment) und Kreisausschnitt (Kreissektor) .	145
3.1.6.3	Kreisring	145
3.2	Ebene Trigonometrie	146
3.2.1	Dreiecksberechnungen	146
3.2.1.1	Berechnungen in rechtwinkligen ebenen Dreiecken	146
3.2.1.2	Berechnungen in ebenen schiefwinkligen Dreiecken	146
3.2.2	Geodätische Anwendungen	149
3.2.2.1	Geodätische Koordinaten	149
3.2.2.2	Winkel in der Geodäsie	150
3.2.2.3	Vermessungstechnische Anwendungen	152
3.3	Stereometrie	155
3.3.1	Geraden und Ebenen im Raum	155
3.3.2	Kanten, Ecken, Raumwinkel	156
3.3.3	Polyeder	157
3.3.4	Körper, die durch gekrümmte Flächen begrenzt sind	160
3.4	Sphärische Trigonometrie	164
3.4.1	Grundbegriffe der Geometrie auf der Kugel	164
3.4.1.1	Kurven, Bogen und Winkel auf der Kugel	164
3.4.1.2	Spezielle Koordinatensysteme	166
3.4.1.3	Sphärisches Zweieck	167
3.4.1.4	Sphärisches Dreieck	167
3.4.1.5	Polardreieck	168
3.4.1.6	Eulersche und Nicht-Eulersche Dreiecke	168
3.4.1.7	Dreikant	169
3.4.2	Haupteigenschaften sphärischer Dreiecke	169
3.4.2.1	Allgemeine Aussagen	169
3.4.2.2	Grundformeln und Anwendungen	170
3.4.2.3	Weitere Formeln	172
3.4.3	Berechnung sphärischer Dreiecke	174
3.4.3.1	Grundaufgaben, Genauigkeitsbetrachtungen	174
3.4.3.2	Rechtwinklig sphärisches Dreieck	174

	3.4.3.3	Schiefwinklig sphärisches Dreieck	176
	3.4.3.4	Sphärische Kurven	180
3.5		Vektoralgebra und analytische Geometrie	186
	3.5.1	Vektoralgebra	186
	3.5.1.1	Definition des Vektors	186
	3.5.1.2	Rechenregeln	187
	3.5.1.3	Koordinaten eines Vektors	188
	3.5.1.4	Richtungskoeffizient oder Entwicklungskoeffizient	189
	3.5.1.5	Skalarprodukt und Vektorprodukt	189
	3.5.1.6	Mehrfache multiplikative Verknüpfungen	191
	3.5.1.7	Vektorielle Gleichungen	193
	3.5.1.8	Kovariante und kontravariante Koordinaten eines Vektors	194
	3.5.1.9	Geometrische Anwendungen der Vektoralgebra	195
	3.5.2	Analytische Geometrie der Ebene	196
	3.5.2.1	Ebene Koordinatensysteme	196
	3.5.2.2	Koordinatentransformationen	197
	3.5.2.3	Spezielle Punkte in der Ebene	198
	3.5.2.4	Flächeninhalte	200
	3.5.2.5	Gleichung einer Kurve	200
	3.5.2.6	Gerade	201
	3.5.2.7	Kreis	204
	3.5.2.8	Ellipse	205
	3.5.2.9	Hyperbel	207
	3.5.2.10	Parabel	210
	3.5.2.11	Kurven 2. Ordnung (Kegelschnitte)	212
	3.5.3	Analytische Geometrie des Raumes	215
	3.5.3.1	Grundlagen	215
	3.5.3.2	Räumliche Koordinatensysteme	217
	3.5.3.3	Koordinatentransformationen	219
	3.5.3.4	Drehung mithilfe von Richtungskosinussen	220
	3.5.3.5	Drehung mithilfe von Cardan–Winkeln	221
	3.5.3.6	Drehung mithilfe von Euler–Winkeln	222
	3.5.3.7	Spezielle Punkte im Raum	223
	3.5.3.8	Gleichung einer Fläche	224
	3.5.3.9	Gleichung einer Raumkurve	225
	3.5.3.10	Ebenen im Raum	225
	3.5.3.11	Geraden im Raum	228
	3.5.3.12	Schnittpunkte und Winkel von Ebenen und Geraden im Raum	229
	3.5.3.13	Flächen 2. Ordnung, Gleichungen in Normalform	231
	3.5.3.14	Flächen 2. Ordnung, allgemeine Theorie	234
	3.5.4	Geometrische Transformationen und Koordinatentransformationen	236
	3.5.4.1	Geometrische 2D–Transformationen	236
	3.5.4.2	Homogene Koordinaten, Matrixdarstellung	238
	3.5.4.3	Koordinatentransformation	238
	3.5.4.4	Verkettung von Transformationen	239
	3.5.4.5	3D–Transformationen	240
	3.5.4.6	Deformationstransformationen	243
	3.5.5	Planare Projektionen	244
	3.5.5.1	Klassifizierung	244
	3.5.5.2	Ansichtskoordinatensystem	245
	3.5.5.3	Tafelprojektionen	245
	3.5.5.4	Axonometrische Projektion	246

	3.5.5.5	Isometrische Projektion	246
	3.5.5.6	Schiefe Parallelprojektion	247
	3.5.5.7	Perspektivische Projektion	248
3.6		Differenzialgeometrie	250
3.6.1		Ebene Kurven	250
	3.6.1.1	Definitionen ebener Kurven	250
	3.6.1.2	Lokale Elemente einer Kurve	250
	3.6.1.3	Ausgezeichnete Kurvenpunkte und Asymptoten	256
	3.6.1.4	Allgemeine Untersuchung einer Kurve nach ihrer Gleichung	261
	3.6.1.5	Evoluten und Evolventen	262
	3.6.1.6	Einhüllende von Kurvenscharen	262
3.6.2		Raumkurven	263
	3.6.2.1	Definitionen für Raumkurven	263
	3.6.2.2	Begleitendes Dreibein	264
	3.6.2.3	Krümmung und Windung	266
3.6.3		Flächen	269
	3.6.3.1	Definitionen für Flächen	269
	3.6.3.2	Tangentialebene und Flächennormale	270
	3.6.3.3	Linielement auf einer Fläche	271
	3.6.3.4	Krümmung einer Fläche	273
	3.6.3.5	Regelflächen und abwickelbare Flächen	275
	3.6.3.6	Geodätische Linien auf einer Fläche	276
4		Lineare Algebra	277
4.1		Matrizen	277
	4.1.1	Begriff der Matrix	277
	4.1.2	Quadratische Matrizen	278
	4.1.3	Vektoren	279
	4.1.4	Rechenoperationen mit Matrizen	280
	4.1.5	Rechenregeln für Matrizen	283
	4.1.6	Vektor- und Matrizennormen	285
		4.1.6.1 Vektornormen	285
		4.1.6.2 Matrizennormen	285
4.2		Determinanten	286
	4.2.1	Definitionen	286
	4.2.2	Rechenregeln für Determinanten	286
	4.2.3	Berechnung von Determinanten	287
4.3		Tensoren	288
	4.3.1	Transformation des Koordinatensystems	288
	4.3.2	Tensoren in kartesischen Koordinaten	289
	4.3.3	Tensoren mit speziellen Eigenschaften	291
		4.3.3.1 Tensoren 2. Stufe	291
		4.3.3.2 Invariante Tensoren	291
	4.3.4	Tensoren in krummlinigen Koordinatensystemen	292
		4.3.4.1 Kovariante und kontravariante Basisvektoren	292
		4.3.4.2 Kovariante und kontravariante Koordinaten von Tensoren 1. Stufe	293
		4.3.4.3 Kovariante, kontravariante und gemischte Koordinaten von Tensoren 2. Stufe	294
		4.3.4.4 Rechenregeln	295
	4.3.5	Pseudotensoren	295
		4.3.5.1 Punktspiegelung am Koordinatenursprung	295
		4.3.5.2 Einführung des Begriffs Pseudotensor	296

4.4	Quaternionen und Anwendungen	297
4.4.1	Quaternionen	298
4.4.1.1	Definition und Darstellung	298
4.4.1.2	Matrizendarstellung von Quaternionen	299
4.4.1.3	Rechenregeln	300
4.4.2	Darstellung von Drehungen im $\mathbb{R}^3$	302
4.4.2.1	Drehungen eines Objektes um die Koordinatenachsen	303
4.4.2.2	Cardan–Winkel	303
4.4.2.3	Euler–Winkel	304
4.4.2.4	Drehung um eine beliebige Achse durch den Nullpunkt	304
4.4.2.5	Drehungen und Quaternionen	305
4.4.2.6	Quaternionen und Cardan–Winkel	307
4.4.2.7	Effizienz der Algorithmen	309
4.4.3	Anwendungen der Quaternionen	310
4.4.3.1	3D–Rotationen in der Computergrafik	310
4.4.3.2	Interpolation mittels Rotationsmatrizen	311
4.4.3.3	Stereografische Projektion	311
4.4.3.4	Satellitennavigation	312
4.4.3.5	Vektoranalysis	313
4.4.3.6	Einheitsbiquaternionen und Starrkörperbewegungen	314
4.5	Lineare Gleichungssysteme	315
4.5.1	Lineare Systeme, Austauschverfahren	315
4.5.1.1	Lineare Systeme	315
4.5.1.2	Austauschverfahren	315
4.5.1.3	Lineare Abhängigkeiten	316
4.5.1.4	Invertierung einer Matrix	316
4.5.2	Lösung linearer Gleichungssysteme	316
4.5.2.1	Definition und Lösbarkeit	316
4.5.2.2	Anwendung des Austauschverfahrens	318
4.5.2.3	Cramersche Regel	319
4.5.2.4	Gaußscher Algorithmus	320
4.5.3	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	321
4.5.3.1	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme und lineare Quadratmittelprobleme	321
4.5.3.2	Hinweise zur numerischen Lösung linearer Quadratmittelprobleme	322
4.6	Eigenwertaufgaben bei Matrizen	322
4.6.1	Allgemeines Eigenwertproblem	322
4.6.2	Spezielles Eigenwertproblem	322
4.6.2.1	Charakteristisches Polynom	322
4.6.2.2	Reelle symmetrische Matrizen, Ähnlichkeitstransformationen	324
4.6.2.3	Hauptachsentransformation quadratischer Formen	325
4.6.2.4	Hinweise zur numerischen Bestimmung von Eigenwerten	327
4.6.3	Singulärwertzerlegung	329
5	Algebra und Diskrete Mathematik	330
5.1	Logik	330
5.1.1	Aussagenlogik	330
5.1.2	Ausdrücke der Prädikatenlogik	333
5.2	Mengenlehre	335
5.2.1	Mengenbegriff, spezielle Mengen	335
5.2.2	Operationen mit Mengen	336
5.2.3	Relationen und Abbildungen	339

5.2.4	Äquivalenz- und Ordnungsrelationen	341
5.2.5	Mächtigkeit von Mengen	342
5.3	Klassische algebraische Strukturen	344
5.3.1	Operationen	344
5.3.2	Halbgruppen	344
5.3.3	Gruppen	344
5.3.3.1	Definition und grundlegende Eigenschaften	344
5.3.3.2	Untergruppen und direkte Produkte	346
5.3.3.3	Abbildungen zwischen Gruppen	347
5.3.4	Darstellung von Gruppen	348
5.3.4.1	Definitionen	348
5.3.4.2	Spezielle Darstellungen	351
5.3.4.3	Direkte Summe von Darstellungen	352
5.3.4.4	Direktes Produkt von Darstellungen	352
5.3.4.5	Reduzible und irreduzible Darstellungen	352
5.3.4.6	Erstes Schursches Lemma	353
5.3.4.7	Clebsch–Gordan–Reihe	353
5.3.4.8	Irreduzible Darstellung der symmetrischen Gruppe S_M	354
5.3.5	Anwendungen von Gruppen	354
5.3.5.1	Symmetrieoperationen, Symmetrieelemente	354
5.3.5.2	Symmetriegruppen	355
5.3.5.3	Symmetrieoperationen bei Molekülen	355
5.3.5.4	Symmetriegruppen in der Kristallographie	357
5.3.5.5	Symmetriegruppen in der Quantenmechanik	359
5.3.5.6	Weitere Anwendungsbeispiele aus der Physik	360
5.3.6	Lie–Gruppen und Lie–Algebren	360
5.3.6.1	Einführung	360
5.3.6.2	Matrix–Lie–Gruppen	361
5.3.6.3	Wichtige Anwendungen	364
5.3.6.4	Lie–Algebra	365
5.3.6.5	Anwendungen in der Robotik	367
5.3.7	Ringe und Körper	370
5.3.7.1	Definitionen	370
5.3.7.2	Unterringe, Ideale	371
5.3.7.3	Homomorphismen, Isomorphismen, Homomorphiesatz	372
5.3.7.4	Endliche Körper und Schieberegister	372
5.3.8	Vektorräume	374
5.3.8.1	Definition	374
5.3.8.2	Lineare Abhängigkeit	375
5.3.8.3	Lineare Operatoren	375
5.3.8.4	Unterräume, Dimensionsformel	376
5.3.8.5	Euklidische Vektorräume, Euklidische Norm	376
5.3.8.6	Bilineare Abbildungen, Bilinearformen	377
5.4	Elementare Zahlentheorie	379
5.4.1	Teilbarkeit	379
5.4.1.1	Teilbarkeit und elementare Teilbarkeitsregeln	379
5.4.1.2	Primzahlen	379
5.4.1.3	Teilbarkeitskriterien	381
5.4.1.4	Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches	382
5.4.1.5	Fibonacci–Zahlen	384
5.4.2	Lineare Diophantische Gleichungen	384
5.4.3	Kongruenzen und Restklassen	386

5.4.4	Sätze von Fermat, Euler und Wilson	390
5.4.5	Weitere Primzahltests	391
5.4.6	Codierungen	392
5.4.6.1	Prüfzeichenverfahren	392
5.4.6.2	Fehlerkorrigierende Codes	394
5.5	Kryptologie	396
5.5.1	Aufgabe der Kryptologie	396
5.5.2	Kryptosysteme	396
5.5.3	Mathematische Präzisierung	397
5.5.4	Sicherheit von Kryptosystemen	397
5.5.4.1	Methoden der klassischen Kryptologie	398
5.5.4.2	Affine Substitutionen	398
5.5.4.3	Vigenere-Chiffre	398
5.5.4.4	Matrixsubstitutionen	399
5.5.5	Methoden der klassischen Kryptoanalyse	399
5.5.5.1	Statistische Analyse	399
5.5.5.2	Kasiski-Friedman-Test	399
5.5.6	One-Time-Tape	400
5.5.7	Verfahren mit öffentlichem Schlüssel	400
5.5.7.1	Konzept von Diffie und Hellman	400
5.5.7.2	Einwegfunktionen	401
5.5.7.3	RSA-Verfahren	401
5.5.8	AES-Algorithmus (Advanced Encryption Standard)	402
5.5.9	IDEA-Algorithmus (International Data Encryption Algorithm)	402
5.6	Universelle Algebra	403
5.6.1	Definition	403
5.6.2	Kongruenzrelationen, Faktoralgebren	403
5.6.3	Homomorphismen	403
5.6.4	Homomorphiesatz	404
5.6.5	Varietäten	404
5.6.6	Termalgebren, freie Algebren	404
5.7	Boolesche Algebren und Schaltalgebra	405
5.7.1	Definition	405
5.7.2	Dualitätsprinzip	405
5.7.3	Endliche Boolesche Algebren	406
5.7.4	Boolesche Algebren als Ordnungen	406
5.7.5	Boolesche Funktionen, Boolesche Ausdrücke	406
5.7.6	Normalformen	408
5.7.7	Schaltalgebra	408
5.8	Algorithmen der Graphentheorie	411
5.8.1	Grundbegriffe und Bezeichnungen	411
5.8.2	Durchlaufungen von ungerichteten Graphen	414
5.8.2.1	Kantenfolgen	414
5.8.2.2	Eulersche Linien	415
5.8.2.3	Hamilton-Kreise	416
5.8.3	Bäume und Gerüste	417
5.8.3.1	Bäume	417
5.8.3.2	Gerüste	418
5.8.4	Matchings	419
5.8.5	Planare Graphen	420
5.8.6	Bahnen in gerichteten Graphen	421
5.8.7	Transportnetze	422