

**Taschenbuch  
mathematischer Formeln  
und moderner Verfahren**

## **Professor Dr. Horst Stöcker**

Judah M. Eisenberg Professor Laureatus an der Johann Wolfgang Goethe-Universität  
Frankfurt am Main,

Direktor und Senior Fellow des FIAS (Frankfurt Institute for Advanced Studies),

Gründungsdirektor der FIGSS (Frankfurt International Graduate School of Sciences).

Seit August 2007 Wissenschaftlicher Geschäftsführer der GSI (Gesellschaft für Schwerionenforschung).

### *Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek*

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

**ISBN 978-3-8171-1811-3 (Buch)**

**ISBN 978-3-8171-1812-0 (Buch mit CD-ROM)**

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus – sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren, Herausgeber und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

Nachdruck der 4., korrigierten Auflage 1999, 2003, 2007

© Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2007

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, Brand-Erbisdorf <[www.naake-satz.de](http://www.naake-satz.de)>

Druck: Clausen & Bosse, Leck

Printed in Germany

**Koautoren** (und die von ihnen bearbeiteten Kapitel)

**Gesamtdurchsicht für die 4. Auflage**

Prof. Dr.-Ing. **Holger Lutz**, FH Gießen-Friedberg,

Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Math. **Monika Lutz**, FH Gießen-Friedberg

Dipl.-Phys. **Jens Konopka**, Uni Frankfurt, **(1 & 2)** mit

Dr.-Ing. Dieter Zetsche, Mercedes-Benz AG, Stuttgart,

Prof. Dr. Helmut Kuhnle, Uni Hohenheim

Dr. **André Jahns**, Uni Frankfurt, **(3 & 4)** mit

Priv.-Doz. Dr. Hans Babovsky, Uni Kaiserslautern,

Dipl.-Phys. Nina Flach, Dresden,

Prof. Dr. Steffen Bohrmann, FHT Mannheim

Dr. **Christoph Hartnack**, Ecole de Mines und Subatech Nantes, **(5 & 16)** mit

Dipl.-Phys. Steffen Bass, Uni Frankfurt,

Prof. Dr.-Ing. Rainer Fremd, FH Rheinland-Pfalz, Abt. Kaiserslautern

Dr. **Jürgen Schaffner**, Niels Bohr Institut, Kopenhagen, **(6–8 & 12–15)** mit

Dr. **Mario Vidović**, Uni Frankfurt,

Prof. Dr.-Ing. Holger Lutz, FH Gießen-Friedberg,

Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Math. Monika Lutz, FH Gießen-Friedberg

Prof. Dr. **Horst Stöcker**, Uni Frankfurt, **(9)** mit

Dr. Christian Hofmann, TU Dresden,

Dipl.-Ing. Helmut Kutz, Mauser AG, Oberndorf

Dr. **Klaus Rumrich**, Uni Frankfurt, **(10 & 24)** mit

Dipl.-Inform. Inge Rumrich, Uni Frankfurt,

Prof. Dr. Wieland Richter, Uni GH Paderborn

Prof. Dr. **Siegfried Fuchs**, Dresden, **(11 & 21)** mit

Dr. **Raffaele Mattiello**, Uni Frankfurt,

Prof. Dr. Georg Terlecki, FH Rheinland-Pfalz, Abt. Kaiserslautern

Dr. **Dirk Rischke**, Columbia University, New York, **(17)** mit

Prof. Dr. Rudolf Pitka, FH Frankfurt

Dr. **Thomas Schönfeld**, Uni Frankfurt, **(18)** mit

Prof. Dr. Wilhelm Werner, FH Heilbronn, Außenstelle Künzelsau

Dr. **Volker Blum**, Schumann & Partner, Köln, **(19 & 20)** mit

Dipl.-Phys. **Christoph Best**, Uni Frankfurt,

Phys. Techn. Ass. Astrid Steidl, NTA Isny,

Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Wendt, FHT Esslingen

Prof. Dr. **Adolf Grauel**, Uni GH Paderborn, **(22)**

Dipl.-Phys. **Arnd Bischoff**, Uni Frankfurt, **(23)** mit

Prof. Dr. Bernd Schürmann, Siemens AG

Dipl.-Phys. **Markus Hofmann**, Uni Frankfurt, **(24)** mit

Dipl.-Phys. Christian Spieles, Uni Frankfurt,

Prof. Dr. Günter Flach, Dresden

Dipl.-Phys. **Luke Winkelmann**, Uni Frankfurt, **(25)** mit

Prof. Dipl.-Ing. Jürgen Wendeler, FH der Telekom Dieburg

Mit Beiträgen von:

Dipl.-Phys. Thomas Achenbach, FTZ, Telekom, Darmstadt,  
Prof. Dr. Jürgen Albrecht, Märkische Fachhochschule,  
Prof. Dr. V. Baumgartner, HTW des Saarlandes, Saarbrücken,  
Dipl.-Phys. Marcus Bleicher, Uni Frankfurt,  
Prof. Dr. Gerhard Brecht, Fachhochschule Lippe,  
Dipl.-Ing. Gerd Brinkmann, Leipzig,  
Dr. Gerd Buchwald, Hoechst AG,  
Prof. Dr. H. Carl, FH Biberach,  
Prof. Dr. A. Dobranis, Rheinische FH Köln,  
Dipl.-Phys. Adrian Dumitru, Uni Frankfurt,  
Dipl.-Phys. Ulrich Eichmann, Uni Frankfurt,  
Dr. Norbert Fleischer, Moskau,  
Prof. Dr. W. Glaser, FH Hamburg,  
Prof. Günter Graf, FH Karlsruhe,  
Dipl.-Phys. Harald Graf, Uni Frankfurt,  
Prof. E. Groth, FH Hamburg,  
Prof. Dr. M. Herrmann, Uni Jena,  
Prof. Dr. W. Hofner, FH Ravensburg-Weingarten,  
Dipl.-Inform. Jürgen Hollatz, TU München,  
Dr. Kyung-Ho Kang, Uni Frankfurt,  
Prof. Dr. K. Karow, FH Rheinland Pfalz,  
Dr. Andreas von Keitz, Uni Frankfurt,  
Prof. Dr. H.-J. Kröcker, Humboldt-Uni Berlin,  
Prof. Dr. E. Lanckau, TU Chemnitz,  
Dr. B. Luderer, TU Chemnitz,  
Gerhard Merziger, Hannover,  
Prof. Dr. H.D. Motz, GH Wuppertal,  
Dipl.-Ing. Robert Münzel, Studiendirektor, Feldbergsschule Oberursel,  
Dr. Hans-Georg Reusch, Uni Münster,  
Dipl.-Phys. Matthias Rosenstock, Uni Frankfurt,  
Dr. Wolfgang Schäfer, Bosch Telekom, Frankfurt,  
Dr. H.-J. Schell, TU Chemnitz,  
Prof. Dr. Kh. Schöffler, FH Krefeld,  
Dr. Juri Stolyarsky, JINR Dubna,  
Prof. Dr. Peter Thieler, FH Flensburg,  
Dr. Dirk Troltenier, Louisiana State University,  
Prof. Dr. U. Wöhrl, TH Zwickau.

## Was für wen?

Die Anwendung der Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften wird heute durch den Einsatz von Computern bestimmt. In Ausbildung und Praxis werden daher die Methoden der analytischen Mathematik zunehmend durch numerische, computergerechte Rechenverfahren ergänzt.

Das **Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren** wurde von erfahrenen Hochschuldozenten, Wissenschaftlern und in der Praxis stehenden Ingenieuren unter diesem Gesichtspunkt erarbeitet und zusammengestellt.

Das Taschenbuch vereint

- elementare Schulmathematik,
- Basiswissen für Abiturienten und Abiturientinnen, Fachoberschüler und Studierende im Grundstudium,
- Aufbauwissen für fortgeschrittene Studierende,
- den mathematischen Background für alle Ingenieur- und Wissenschaftsbereiche.

## Wozu?

- komplettes **Nachschlagewerk** für die Berufspraxis,
- als rasch verfügbarer Informationspool für Klausuren und Prüfungen,
- sicheres Hilfsmittel beim Lösen von Problemen und Übungsaufgaben.

## Was ist enthalten und wie wird es dargestellt?

- alle wichtigen **Begriffe, Formeln, Regeln und Sätze**
- zahlreiche **Beispiele** und praktische **Anwendungen**
- ▷ Hinweise auf **Fehlerquellen**, wichtige Tips und Querverweise
- analytische und numerische **Lösungsverfahren** im direkten Vergleich
- **Programmsequenzen** in PASCAL-Notation.

## Struktur und Besonderheiten

Die Anwender gewinnen die benötigten Informationen gezielt und rasch durch die benutzerfreundliche Gestaltung des Taschenbuchs:

- strukturiertes Inhaltsverzeichnis,
- Griffleisten und farbige Lesezeichen für den schnellen Zugriff,
- umfassendes Stichwortverzeichnis.

## Neuerungen und Überarbeitungen in der vierten Auflage

Graphen und Bäume, Wavelets, Fuzzy Logik, Neuronale Netze, Betriebssysteme sowie die Programmiersprachen PASCAL, C, C++, FORTRAN und eine Einführung in die Computeralgebra mit MATHEMATICA und MAPLE.

## Leserkontakt

Wir möchten auch Sie als Nutzer des Taschenbuchs bitten, Vorschläge und Ergänzungen an den Verlag zu senden.

Autoren und Verlag Harri Deutsch

Gräfstraße 47

D-60486 Frankfurt am Main

E-Mail: [verlag@harri-deutsch.de](mailto:verlag@harri-deutsch.de)

<http://www.harri-deutsch.de>



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zahlenrechnen (Arithmetik und Numerik)</b>	<b>1</b>
1.1	Mengen	1
	Darstellung von Mengen	1
	Mengenoperationen	2
	Gesetze der Mengenalgebra	3
	Abbildung und Funktion	4
1.2	Zahlensysteme	4
	Dekadisches Zahlensystem	4
	Weitere Zahlensysteme	6
	Darstellung in Rechnern	6
	Horner-Schema zur Zahlendarstellung	7
1.3	Natürliche Zahlen	7
	Vollständige Induktion	8
	Vektoren und Felder, Indizierung	8
	Rechnen mit natürlichen Zahlen	8
1.4	Ganze Zahlen	11
1.5	Rationale Zahlen (gebrochene Zahlen)	11
	Dezimalbrüche	11
	Brüche	12
	Rechnen mit Brüchen	13
1.6	Rechnen mit Quotienten	14
	Proportion	14
	Dreisatz	14
1.7	Finanzmathematik	14
	Prozentrechnung	15
	Zins und Zinseszins	15
	Tilgungsrechnung	16
	Rentenrechnung	17
	Abschreibung	18
1.8	Irrationale Zahlen	18
1.9	Reelle Zahlen	19
1.10	Komplexe Zahlen	19
	Körper der komplexen Zahlen	20
1.11	Rechnen mit reellen Zahlen	20
	Vorzeichen und Betrag	20
	Ordnungsrelationen	21
	Intervalle	22
	Runden und Abschneiden	22
	Rechnen mit Intervallen	23
	Klammerung	23
	Addition und Subtraktion	24
	Summenzeichen	25
	Multiplikation und Division	26
	Produktzeichen	27
	Potenzen und Wurzeln	28
	Exponentiation und Logarithmus	30
1.12	Binomischer Satz	31
	Binomische Formeln	31
	Binomialkoeffizienten	31

	Pascalsches Dreieck . . . . .	32
	Eigenschaften der Binomialkoeffizienten . . . . .	32
	Entwicklung von Potenzen von Summen . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Gleichungen und Ungleichungen (Algebra)</b>	<b>34</b>
2.1	Grundlegende algebraische Begriffe . . . . .	34
	Nomenklatur . . . . .	34
	Gruppe . . . . .	35
	Ring . . . . .	36
	Körper . . . . .	36
	Vektorraum . . . . .	36
	Algebra . . . . .	37
2.2	Gleichungen mit einer Unbekannten . . . . .	37
	Elementare Äquivalenzumformungen . . . . .	37
	Übersicht der verschiedenen Gleichungsarten . . . . .	38
2.3	Lineare Gleichungen . . . . .	39
	Gewöhnliche lineare Gleichungen . . . . .	39
	Lineare Gleichungen in gebrochener Form . . . . .	39
	Lineare Gleichungen in irrationaler Form . . . . .	39
2.4	Quadratische Gleichungen . . . . .	39
	Quadratische Gleichungen in gebrochener Form . . . . .	40
	Quadratische Gleichungen in irrationaler Form . . . . .	40
2.5	Kubische Gleichungen . . . . .	40
2.6	Gleichungen vierten Grades . . . . .	42
	Allgemeine Gleichung vierten Grades . . . . .	42
	Biquadratische Gleichungen . . . . .	42
	Symmetrische Gleichungen vierten Grades . . . . .	42
2.7	Gleichungen beliebigen Grades . . . . .	43
	Polynomdivision . . . . .	43
2.8	Gebrochenrationale Gleichungen . . . . .	44
2.9	Irrationale Gleichungen . . . . .	44
	Wurzelgleichungen . . . . .	44
	Potenzgleichungen . . . . .	45
2.10	Transzendente Gleichungen . . . . .	45
	Exponentialgleichungen . . . . .	45
	Logarithmusgleichungen . . . . .	46
	Trigonometrische (goniometrische) Gleichungen . . . . .	46
2.11	Gleichungen mit Beträgen . . . . .	46
	Gleichung mit einem Betragsausdruck . . . . .	47
	Gleichungen mit mehreren Betragsausdrücken . . . . .	47
2.12	Ungleichungen . . . . .	48
	Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen . . . . .	48
	Addition und Multiplikation von Ungleichungen . . . . .	49
2.13	Numerische Lösung von Gleichungen . . . . .	49
	Grafische Lösung . . . . .	49
	Intervallschachtelung . . . . .	50
	Sekantenverfahren und Regula falsi . . . . .	50
	Newton-Verfahren . . . . .	51
	Sukzessive Approximation . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Geometrie und Trigonometrie der Ebene</b>	<b>54</b>
3.1	Ortslinien . . . . .	54
3.2	Grundkonstruktionen . . . . .	55
	Streckenhalbierung . . . . .	55



	Winkelhalbierung .....	55
	Senkrechte .....	56
	Lot .....	56
	Parallele in gegebenem Abstand .....	56
	Parallele durch gegebenen Punkt .....	56
3.3	Winkel .....	56
	Winkelangabe .....	56
	Winkelarten .....	57
	Winkel an Parallelen .....	58
3.4	Ähnlichkeit und Strahlensätze .....	59
	Strahlensätze .....	59
	Streckenteilung .....	59
	Mittelwerte .....	60
	Stetige Teilung (Goldener Schnitt) .....	60
3.5	Dreiecke .....	61
	Kongruenzsätze .....	61
	Ähnlichkeit von Dreiecken .....	61
	Dreieckskonstruktion .....	62
	Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks .....	63
	Berechnung eines beliebigen Dreiecks .....	64
	Winkel- und Seitenbeziehungen im Dreieck .....	65
	Höhe .....	66
	Winkelhalbierende .....	66
	Seitenhalbierende .....	67
	Mittelsenkrechte, Inkreis, Umkreis, Ankreis .....	67
	Dreiecksfläche .....	68
	Verallgemeinerter Satz des Pythagoras .....	69
	Winkelbeziehungen .....	69
	Sinussatz .....	69
	Kosinussatz .....	69
	Tangenssatz .....	69
	Halbwinkelsätze .....	70
	Mollweidesche Formeln .....	70
	Seitensätze .....	70
	Gleichschenkliges Dreieck .....	70
	Gleichseitiges Dreieck .....	71
	Rechtwinkliges Dreieck .....	72
	Satz des Thales .....	73
	Satz des Pythagoras .....	73
	Kathetensatz .....	73
	Höhensatz .....	73
3.6	Vierecke .....	73
	Allgemeines Viereck .....	74
	Trapez .....	74
	Parallelogramm .....	74
	Rhombus (Raute) .....	75
	Rechteck .....	75
	Quadrat .....	76
	Sehnenviereck .....	76
	Tangentenviereck .....	77
	Drachenviereck .....	77
3.7	Regelmäßige $n$ -Ecke (Polygone) .....	77
	Allgemeines regelmäßiges $n$ -Eck .....	77
	Bestimmte regelmäßige Vielecke (Polygone) .....	78

3.8	Kreisförmige Objekte . . . . .	80
	Kreis . . . . .	80
	Kreisförmige Flächen . . . . .	81
	Kreisring . . . . .	81
	Kreisausschnitt (Kreissektor) . . . . .	81
	Kreisringsektor . . . . .	82
	Kreisabschnitt (Krissegment) . . . . .	82
	Ellipse . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Geometrie des Raumes</b> . . . . .	<b>84</b>
4.1	Allgemeine Sätze . . . . .	84
	Satz von Cavalieri . . . . .	84
	Simpsonsche Regel . . . . .	84
	Guldinsche Regeln . . . . .	84
4.2	Prisma . . . . .	85
	Schiefes Prisma . . . . .	85
	Gerades Prisma . . . . .	85
	Quader (Rechteck) . . . . .	85
	Würfel . . . . .	85
	Schief abgeschnittenes $n$ -seitiges Prisma . . . . .	86
4.3	Pyramide . . . . .	86
	Tetraeder . . . . .	86
	Pyramidenstumpf . . . . .	87
4.4	Reguläre Polyeder . . . . .	87
	Eulerscher Polyedersatz . . . . .	87
	Tetraeder . . . . .	87
	Würfel (Hexaeder) . . . . .	88
	Oktaeder . . . . .	88
	Dodekaeder . . . . .	88
	Ikosaeder . . . . .	89
4.5	Sonstige Körper . . . . .	89
	Prismoid, Prisma . . . . .	89
	Keil . . . . .	89
	Obelisk . . . . .	90
4.6	Zylinder . . . . .	90
	Allgemeiner Zylinder . . . . .	90
	Gerader Kreiszyylinder . . . . .	90
	Schiefabgeschnittener Kreiszyylinder . . . . .	91
	Zylinderhuf . . . . .	91
	Hohlzylinder (Rohr) . . . . .	91
4.7	Kegel . . . . .	92
	Gerader Kreiskegel . . . . .	92
	Gerader Kreiskegelstumpf . . . . .	92
4.8	Kugel . . . . .	93
	Vollkugel . . . . .	93
	Hohlkugel . . . . .	93
	Kugelausschnitt (Kugelsektor) . . . . .	93
	Kugelabschnitt (Kugelsegment, Kalotte, Kugelkappe) . . . . .	94
	Kugelzone (Kugelschicht) . . . . .	94
	Kugelzweieck . . . . .	94
4.9	Kugelgeometrie . . . . .	95
	Allgemeines Kugeldreieck (Eulersches Dreieck) . . . . .	95
	Rechtwinkliges Kugeldreieck . . . . .	96
	Schiefwinkliges Kugeldreieck . . . . .	97

4.10	Rotationskörper . . . . .	97
	Ellipsoid . . . . .	97
	Rotationsparaboloid . . . . .	98
	Rotationshyperboloid . . . . .	98
	Tonne (Faß) . . . . .	98
	Torus (Ring) . . . . .	98
4.11	Fraktale Geometrie . . . . .	99
	Skaleninvarianz und Selbstähnlichkeit . . . . .	99
	Konstruktion selbstähnlicher Objekte . . . . .	99
	Hausdorff-Dimension . . . . .	99
	Cantor-Menge . . . . .	100
	Koch-Kurve . . . . .	100
	Kochsche Schneeflocke . . . . .	100
	Sierpiński-Dreieck . . . . .	100
	Box-counting-Algorithmus . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Funktionen</b>	<b>102</b>
5.1	Folgen, Reihen und Funktionen . . . . .	102
	Folgen und Reihen . . . . .	102
	Eigenschaften von Folgen, Grenzwerte . . . . .	103
	Funktionen . . . . .	104
	Klassifikation von Funktionen . . . . .	106
	Grenzwert und Stetigkeit . . . . .	107
5.2	Kurvendiskussion . . . . .	109
	Definitionsbereich . . . . .	109
	Symmetrie . . . . .	109
	Verhalten im Unendlichen . . . . .	109
	Definitionslücken und Unstetigkeitsstellen . . . . .	110
	Nullstellen . . . . .	111
	Vorzeichenverlauf . . . . .	111
	Steigungsverlauf, Extrema . . . . .	112
	Krümmung . . . . .	113
	Wendepunkt . . . . .	113
5.3	Steckbrief für Funktionen . . . . .	114
5.4	Konstante Funktion . . . . .	120
5.5	Sprungfunktion . . . . .	122
5.6	Betragsfunktion . . . . .	125
5.7	Deltafunktion . . . . .	129
5.8	Gaußklammer-Funktion, Restfunktion . . . . .	132
5.9	Lineare Funktion – Gerade . . . . .	136
5.10	Quadratische Funktion – Parabel . . . . .	139
5.11	Kubische Funktion . . . . .	142
5.12	Potenzfunktion höheren Grades . . . . .	146
5.13	Polynome höheren Grades . . . . .	150
5.14	Darstellung von Polynomen und spezielle Polynome . . . . .	153
	Summen- und Produktdarstellung . . . . .	153
	Taylorentwicklung . . . . .	154
	Horner-Schema . . . . .	155
	Newtonsches Interpolationspolynom . . . . .	157
	Lagrange-Polynome . . . . .	158
	Bezier-Polynome und Splines . . . . .	159
	Spezielle Polynome . . . . .	164
5.15	Hyperbel . . . . .	167
5.16	Reziproke quadratische Funktion . . . . .	170

5.17	Potenzfunktionen mit negativem Exponenten	173
5.18	Quotient zweier Polynome	176
	Polynomdivision und Partialbruchzerlegung	180
	Padé-Approximation	182
5.19	Quadratwurzelfunktion	185
5.20	Wurzelfunktionen	188
5.21	Potenzfunktion mit gebrochenem Exponenten	191
5.22	Wurzeln von rationalen Funktionen	194
	Kegelschnitte	199
5.23	Logarithmusfunktion	202
5.24	Exponentialfunktion	206
5.25	Exponentialfunktionen von Potenzen	212
5.26	Hyperbolische Sinus- und Kosinusfunktion	219
5.27	Hyperbolische Tangens- und Kotangensfunktion	224
5.28	Sekans hyperbolicus und Kosekans hyperbolicus	229
5.29	Areasinus hyperbolicus und Areakosinus hyperbolicus	234
5.30	Areatangens hyperbolicus und Areakotangens hyperbolicus	237
5.31	Areasekans hyperbolicus und Areakosekans hyperbolicus	240
5.32	Sinus- und Kosinusfunktion	247
	Überlagerung von Schwingungen	254
	Periodische Funktionen	259
5.33	Tangens und Kotangens	260
5.34	Sekans und Kosekans	266
5.35	Arkussinus und Arkuskosinus	272
5.36	Arkustangens und Arkuskotangens	275
5.37	Arkusekans und Arkuskosekans	279
5.38	Algebraische Kurven $n$ -ter Ordnung	282
	Kurven zweiter Ordnung	282
	Kurven dritter Ordnung	284
	Kurven vierter und höherer Ordnung	285
5.39	Rollkurven	287
5.40	Spiralen	289
5.41	Andere Kurven	290
<b>6</b>	<b>Vektorrechnung</b>	<b>291</b>
6.1	Vektoralgebra	291
	Vektor und Skalar	291
	Spezielle Vektoren	291
	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	292
	Vektoraddition	292
	Vektorsubtraktion	293
	Rechengesetze	293
	Lineare (Un-) Abhängigkeit von Vektoren	294
	Basis	294
6.2	Skalarprodukt oder inneres Produkt	297
	Rechenregeln	298
	Eigenschaften und Anwendungen des Skalarproduktes	298
	Orthogonalisierung von Vektoren	300
	Richtungskosinus	301
	Anwendung der Vektorrechnung: Hyperwürfel	302
6.3	Vektorprodukt zweier Vektoren	302
	Eigenschaften des Vektorproduktes	303
6.4	Mehrfachprodukte von Vektoren	304
	Spatprodukt	304

<b>7</b>	<b>Koordinatensysteme</b>	<b>307</b>
7.1	Koordinatensysteme in zwei Dimensionen	307
	Kartesische Koordinaten	307
	Polarkoordinaten	307
	Umrechnungen zwischen 2-D-Koordinatensystemen	308
7.2	2-D-Koordinatentransformation	308
	Parallelverschiebung (Translation)	308
	Drehung (Rotation)	309
	Spiegelung (Reflexion)	310
	Skalierung	311
7.3	Koordinatensysteme in drei Dimensionen	311
	Kartesische Koordinaten	311
	Zylinderkoordinaten	311
	Kugelkoordinaten	312
	Umrechnungen zwischen dreidimensionalen Koordinatensystemen	312
7.4	Koordinatentransformation in drei Dimensionen	313
	Parallelverschiebung (Translation)	313
	Drehung (Rotation)	313
7.5	Anwendung in der Computergrafik	314
7.6	Transformationen	314
	Objektdarstellung und Objektbeschreibung	314
	Homogene Koordinaten	316
	2-D-Translation mit homogenen Koordinaten	317
	2-D-Skalierung mit homogenen Koordinaten	317
	3-D-Translation mit homogenen Koordinaten	318
	3-D-Skalierung mit homogenen Koordinaten	318
	3-D-Rotation von Punkten mit homogenen Koordinaten	318
	Positionierung eines Objektes im Raum	319
	Rotation von Objekten um eine beliebige Achse im Raum	320
	Simulation von Bewegungsabläufen	322
	Spiegelungen	322
	Transformation von Koordinatensystemen	323
	Translation eines Koordinatensystems	323
	Rotation eines Koordinatensystems um eine Hauptachse	323
7.7	Projektionen	325
	Grundprinzipien	325
	Parallelprojektion	325
	Zentralprojektion	327
	Allgemeine Formulierung von Projektionen	328
7.8	Window-Viewport-Transformationen	330
<b>8</b>	<b>Analytische Geometrie</b>	<b>331</b>
8.1	Elemente der Ebene	331
	Abstand zweier Punkte	331
	Teilung einer Strecke	331
	Fläche eines Dreiecks	331
	Gleichung einer Kurve	332
8.2	Gerade	332
	Gleichungsformen der Geraden	332
	Hessesche Normalform	333
	Schnittpunkt von Geraden	334
	Winkel zwischen Geraden	334
	Parallele und senkrechte Geraden	335

---

8.3	Kreis . . . . .	335
	Kreisgleichungen . . . . .	335
	Kreis und Gerade . . . . .	336
	Kreisschnitt . . . . .	336
	Kreistangentengleichung . . . . .	336
8.4	Ellipse . . . . .	336
	Gleichungsformen der Ellipse . . . . .	337
	Brennpunkteigenschaften der Ellipse . . . . .	337
	Durchmesser der Ellipse . . . . .	338
	Tangente und Normale der Ellipse . . . . .	338
	Krümmung der Ellipse . . . . .	338
	Ellipsenflächen und Ellipsenumfang . . . . .	338
8.5	Parabel . . . . .	339
	Gleichungsformen der Parabel . . . . .	339
	Brennpunkteigenschaften der Parabel . . . . .	340
	Parabeldurchmesser . . . . .	340
	Tangente und Normale der Parabel . . . . .	340
	Krümmung einer Parabel . . . . .	341
	Parabelflächen und Parabelbogenlänge . . . . .	341
	Parabel und Gerade . . . . .	341
8.6	Hyperbel . . . . .	341
	Gleichungsformen der Hyperbel . . . . .	342
	Brennpunkteigenschaften der Hyperbel . . . . .	343
	Tangente und Normale der Hyperbel . . . . .	343
	Konjugierte Hyperbeln und Durchmesser . . . . .	343
	Krümmung einer Hyperbel . . . . .	344
	Flächen einer Hyperbel . . . . .	344
	Hyperbel und Gerade . . . . .	344
8.7	Allgemeine Gleichung der Kegelschnitte . . . . .	345
	Form der Kegelschnitte . . . . .	345
	Hauptachsentransformation . . . . .	345
	Geometrische Konstruktion (Kegelschnitt) . . . . .	345
	Leitlinieneigenschaft . . . . .	346
	Polargleichung . . . . .	346
8.8	Elemente im Raum . . . . .	347
	Abstand zweier Punkte . . . . .	347
	Teilung einer Strecke . . . . .	347
	Rauminhalt eines Tetraeders . . . . .	347
8.9	Geraden im Raum . . . . .	347
	Parameterdarstellung einer Geraden . . . . .	347
	Schnittpunkt zweier Geraden . . . . .	348
	Schnittwinkel zweier sich schneidender Geraden . . . . .	348
	Fußpunkt des Lotes (Lotgerade) . . . . .	348
	Abstand zwischen Punkt und Gerade . . . . .	349
	Abstand zweier Geraden . . . . .	349
8.10	Ebenen im Raum . . . . .	349
	Parameterdarstellung der Ebene . . . . .	350
	Koordinatendarstellung der Ebene . . . . .	350
	Hessesche Normalform der Ebene . . . . .	350
	Umformungen . . . . .	350
	Abstand Punkt–Ebene . . . . .	351
	Schnittpunkt Gerade–Ebene . . . . .	351
	Schnittwinkel zweier sich schneidender Ebenen . . . . .	351
	Fußpunkt des Lotes (Lotgerade) . . . . .	351

Spiegelung . . . . .	352
Abstand zweier paralleler Ebenen . . . . .	352
Schnittmenge zweier Ebenen . . . . .	352
8.11 Flächen zweiter Ordnung in Normalform . . . . .	352
Ellipsoid . . . . .	353
Hyperboloid . . . . .	353
Kegel . . . . .	354
Paraboloid . . . . .	354
Zylinder . . . . .	355
8.12 Allgemeine Fläche zweiter Ordnung . . . . .	355
Allgemeine Gleichung . . . . .	355
Hauptachsentransformation . . . . .	356
Gestalt einer Fläche zweiter Ordnung . . . . .	356
<b>9 Matrizen, Determinanten und lineare Gleichungssysteme</b> . . . . .	<b>358</b>
9.1 Matrizen . . . . .	358
Zeilen- und Spaltenvektoren . . . . .	360
9.2 Spezielle Matrizen . . . . .	360
Transponierte, konjugierte und adjungierte Matrizen . . . . .	360
Quadratische Matrizen . . . . .	361
Dreiecksmatrizen . . . . .	362
Diagonalmatrizen . . . . .	363
9.3 Operationen mit Matrizen . . . . .	365
Addition und Subtraktion von Matrizen . . . . .	365
Multiplikation einer Matrix mit skalarem Faktor $c$ . . . . .	366
Multiplikation von Vektoren, Skalarprodukt . . . . .	367
Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor . . . . .	368
Multiplikation von Matrizen . . . . .	368
Rechenregeln der Matrixmultiplikation . . . . .	369
Multiplikation mit einer Diagonalmatrix . . . . .	370
Matrizenmultiplikation nach dem Falk-Schema . . . . .	371
Zeilensummen- und Spaltensummenproben . . . . .	372
9.4 Determinanten . . . . .	373
Zweireihige Determinanten . . . . .	373
Allgemeine Rechenregeln für Determinanten . . . . .	374
Determinantenwert Null . . . . .	375
Dreireihige Determinanten . . . . .	376
Determinanten höherer ( $n$ -ter) Ordnung . . . . .	378
Berechnung $n$ -reihiger Determinanten . . . . .	379
Reguläre und inverse Matrix . . . . .	379
Berechnung der inversen Matrix mit Determinanten . . . . .	380
Rang einer Matrix . . . . .	381
Bestimmung des Ranges mit Unterdeterminanten . . . . .	382
9.5 Lineare Gleichungssysteme . . . . .	382
Systeme von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten . . . . .	384
9.6 Numerische Lösungsverfahren . . . . .	385
Gaußscher Algorithmus für lineare Gleichungssysteme . . . . .	385
Vorwärtselimination . . . . .	385
Pivotisierung . . . . .	387
Rückwärtseinsetzen . . . . .	388
LR-Zerlegung . . . . .	389
Lösbarkeit von $(m \times n)$ -Gleichungssystemen . . . . .	391
Gauß-Jordan-Verfahren zur Matrixinversion . . . . .	393
Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ . . . . .	395

9.7	Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	397
	Gesamtschritt-Verfahren (Jacobi) . . . . .	398
	Einzelschrittverfahren (Gauß-Seidel) . . . . .	398
	Konvergenzkriterien für iterative Verfahren . . . . .	399
	Speicherung der Koeffizientenmatrix . . . . .	400
9.8	Tabelle der Lösungsmethoden . . . . .	401
9.9	Eigenwertgleichungen . . . . .	402
9.10	Systeme von Ungleichungen und Lineare Optimierung . . . . .	404
	Aufgabenstellung . . . . .	404
	Mathematische Modellformulierung . . . . .	405
	Matrizenschreibweise der linearen Optimierung . . . . .	406
	Umwandlung von Ungleichungen in Gleichungen, Schlupfvariablen . . . . .	406
	Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen, grafische Lösung . . . . .	406
	Simplexmethode, Simplexalgorithmus . . . . .	407
	Dualität in der linearen Optimierung . . . . .	410
9.11	Tensoren . . . . .	410
	Rechenregeln für Tensoren . . . . .	411
<b>10</b>	<b>Boolesche Algebra – Anwendung in der Schaltalgebra</b>	<b>413</b>
10.1	Grundbegriffe . . . . .	413
	Aussagen und Wahrheitswerte . . . . .	413
	Aussagenvariablen . . . . .	413
10.2	Boolesche Verknüpfungen . . . . .	414
	Negation, nicht, not . . . . .	414
	Konjunktion, und, and . . . . .	414
	Disjunktion, (inklusive) oder, or . . . . .	415
	Rechenregeln . . . . .	415
10.3	Boolesche Funktionen . . . . .	416
	Verknüpfungsbasis . . . . .	417
10.4	Normalformen . . . . .	417
	Disjunktive Normalform . . . . .	418
	Konjunktive Normalform . . . . .	418
	Darstellung von Funktionen durch Normalformen . . . . .	418
10.5	Karnaugh-Veitch-Diagramme . . . . .	420
	Erstellen eines KV-Diagrammes . . . . .	420
	Eintragen einer Funktion in ein KV-Diagramm . . . . .	421
	Minimierung mit Hilfe von KV-Diagrammen . . . . .	421
10.6	Minimierung nach Quine und McCluskey . . . . .	423
<b>11</b>	<b>Graphen und Algorithmen</b>	<b>425</b>
11.1	Graphen . . . . .	425
	Grundbegriffe . . . . .	425
	Darstellung von Graphen . . . . .	426
	Bäume . . . . .	427
11.2	Matchings . . . . .	428
11.3	Netzwerke . . . . .	428
	Flüsse in Netzwerken . . . . .	428
	Eulerscher Zug und Hamiltonscher Kreis . . . . .	429
<b>12</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>430</b>
12.1	Ableitung einer Funktion . . . . .	430
	Differential . . . . .	430
	Differenzierbarkeit . . . . .	431
12.2	Differentiationsregeln . . . . .	432



Ableitungen elementarer Funktionen . . . . .	432
Ableitungen trigonometrischer Funktionen . . . . .	432
Ableitungen hyperbolischer Funktionen . . . . .	432
Konstantenregel . . . . .	433
Faktorregel . . . . .	433
Potenzregel . . . . .	433
Summenregel . . . . .	433
Produktregel . . . . .	433
Quotientenregel . . . . .	433
Kettenregel . . . . .	434
Logarithmische Ableitung von Funktionen . . . . .	435
Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung . . . . .	435
Ableitung von Funktionen in Polarkoordinaten . . . . .	435
Ableitung einer impliziten Funktion . . . . .	436
Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .	436
Tabelle der Differentiationsregeln . . . . .	437
12.3 Mittelwertsätze . . . . .	437
Satz von Rolle . . . . .	438
Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . . .	438
Erweiterter Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . . .	438
12.4 Höhere Ableitungen . . . . .	439
Steigungsverlauf, Extrema . . . . .	440
Krümmung . . . . .	441
Wendepunkt . . . . .	441
12.5 Näherungsverfahren zur Differentiation . . . . .	442
Grafische Differentiation . . . . .	442
Numerische Differentiation . . . . .	442
12.6 Ableitung von Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	443
Partielle Ableitung . . . . .	443
Totales Differential . . . . .	445
Extrema von Funktionen in zwei Dimensionen . . . . .	445
Extrema mit Nebenbedingungen . . . . .	446
12.7 Anwendungen der Differentialrechnung . . . . .	446
Berechnung unbestimmter Ausdrücke . . . . .	446
Kurvendiskussion . . . . .	448
Extremalaufgaben . . . . .	448
Fehlerrechnung . . . . .	449
Nullstellensuche nach Newton . . . . .	450
<b>13 Differentialgeometrie</b> . . . . .	<b>451</b>
13.1 Ebene Kurven . . . . .	451
Darstellung von Kurven . . . . .	451
Ableitung in impliziter Darstellung . . . . .	451
Ableitung in Parameterdarstellung . . . . .	451
Ableitung in Polarkoordinaten . . . . .	451
Bogenelement einer Kurve . . . . .	452
Tangente, Normale . . . . .	452
Krümmung einer Kurve . . . . .	453
Evoluten und Evolventen . . . . .	454
Wendepunkte, Scheitel . . . . .	455
Singuläre Punkte . . . . .	455
Asymptoten . . . . .	456
Einhüllende einer Kurvenschar . . . . .	456
13.2 Raumkurven . . . . .	457

	Darstellung von Raumkurven . . . . .	457
	Begleitendes Dreibein . . . . .	457
	Krümmung . . . . .	459
	Windung (Torsion) einer Kurve . . . . .	459
	Frenetsche Formeln . . . . .	460
13.3	Flächen . . . . .	460
	Darstellung einer Fläche . . . . .	460
	Tangentialebene und Flächennormale . . . . .	460
	Singuläre Flächenpunkte . . . . .	461
<b>14</b>	<b>Unendliche Reihen</b>	<b>462</b>
14.1	Reihen . . . . .	462
14.2	Konvergenzkriterien . . . . .	462
	Spezielle Zahlenreihen . . . . .	465
14.3	Taylor- und MacLaurin-Reihen . . . . .	465
	Formel von Taylor . . . . .	466
	Taylor-Reihe . . . . .	466
14.4	Potenzreihen . . . . .	467
	Konvergenzbetrachtungen für Potenzreihen . . . . .	467
	Eigenschaften konvergenter Potenzreihen . . . . .	468
	Umkehrung von Potenzreihen . . . . .	469
14.5	Spezielle Potenzreihenentwicklungen . . . . .	469
	Binomische Reihen . . . . .	469
	Spezielle Binomische Reihen . . . . .	470
	Reihen von Exponentialfunktionen . . . . .	470
	Reihen von logarithmischen Funktionen . . . . .	471
	Reihen von trigonometrischen Funktionen . . . . .	472
	Reihen von Arkusfunktionen . . . . .	472
	Reihen von Hyperbelfunktionen . . . . .	473
	Reihen von Areafunktionen . . . . .	473
	Partialbruchentwicklungen . . . . .	473
	Unendliche Produkte . . . . .	474
<b>15</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>475</b>
15.1	Integralbegriff und Integrierbarkeit . . . . .	475
	Stammfunktion . . . . .	475
	Unbestimmtes und bestimmtes Integral . . . . .	475
	Geometrische Deutung . . . . .	476
	Regeln zur Integrierbarkeit . . . . .	477
	Uneigentliche Integrale . . . . .	478
15.2	Integrationsregeln . . . . .	479
	Regeln für unbestimmte Integrale . . . . .	479
	Regeln für bestimmte Integrale . . . . .	479
	Tabelle der Integrationsregeln . . . . .	480
	Integrale einiger elementarer Funktionen . . . . .	481
15.3	Integrationsverfahren . . . . .	482
	Integration durch Substitution . . . . .	483
	Partielle Integration . . . . .	485
	Integration durch Partialbruchzerlegung . . . . .	487
	Integration durch Reihenentwicklung . . . . .	489
15.4	Numerische Integration . . . . .	490
	Rechteckregel . . . . .	491
	Trapezregel . . . . .	491
	Simpson-Regel . . . . .	491

Romberg-Integration . . . . .	492
Gauß-Quadratur . . . . .	493
Tabelle der numerischen Integrationsverfahren . . . . .	494
15.5 Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .	496
15.6 Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale . . . . .	496
Bogenlänge (Rektifikation) . . . . .	496
Flächeninhalt . . . . .	497
Rotationskörper (Drehkörper) . . . . .	498
15.7 Funktionen in Parameterdarstellung . . . . .	499
Bogenlänge in Parameterdarstellung . . . . .	499
Sektorenformel . . . . .	499
Rotationskörper in Parameterdarstellung . . . . .	500
15.8 Mehrfachintegrale und ihre Anwendungen . . . . .	500
Definition von Mehrfachintegralen . . . . .	500
Flächenberechnung . . . . .	501
Schwerpunkt von Bögen . . . . .	502
Trägheitsmoment von Bögen . . . . .	502
Schwerpunkt einer Fläche . . . . .	502
Trägheitsmoment von Flächen . . . . .	503
Schwerpunkt eines Körpers . . . . .	503
Trägheitsmoment eines Körpers . . . . .	503
Schwerpunkt von Drehkörpern . . . . .	503
15.9 Technische Anwendung der Integralrechnung . . . . .	504
Statisches Moment, Schwerpunkt . . . . .	504
Massenträgheitsmoment . . . . .	505
Statik . . . . .	507
Arbeitsberechnungen . . . . .	507
Mittelwerte . . . . .	508
<b>16 Vektoranalysis</b>	<b>509</b>
16.1 Felder . . . . .	509
Symmetrien in Feldern . . . . .	510
16.2 Differentiation und Integration von Vektoren . . . . .	511
Skalenfaktoren in allgemeinen orthogonalen Koordinaten . . . . .	513
Differentialoperatoren . . . . .	513
16.3 Gradient und Potential . . . . .	514
16.4 Richtungsableitung und Vektorgradient . . . . .	516
16.5 Divergenz und Gaußscher Integralsatz . . . . .	517
16.6 Rotation und Stokesscher Integralsatz . . . . .	520
16.7 Laplace-Operator und Greensche Formeln . . . . .	522
16.8 Kombinationen von div, rot und grad, Berechnung von Feldern . . . . .	523
Zusammenfassung . . . . .	525
<b>17 Komplexe Variablen und Funktionen</b>	<b>526</b>
17.1 Komplexe Zahlen . . . . .	526
Imaginäre Zahlen . . . . .	526
Algebraische Darstellung komplexer Zahlen . . . . .	526
Kartesische Darstellung komplexer Zahlen . . . . .	527
Konjugiert komplexe Zahlen . . . . .	527
Betrag einer komplexen Zahl . . . . .	527
Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen . . . . .	528
Exponentialdarstellung komplexer Zahlen . . . . .	528
Umrechnung zwischen kartesischer und trigonometrischer Darstellung . . . . .	529
Riemannsche Zahlenkugel . . . . .	529

17.2	Elementare Rechenoperationen mit komplexen Zahlen . . . . .	530
	Addition und Subtraktion komplexer Zahlen . . . . .	530
	Multiplikation und Division komplexer Zahlen . . . . .	531
	Potenzieren im Komplexen . . . . .	533
	Radizieren im Komplexen . . . . .	534
17.3	Elementare Funktionen einer komplexen Variablen . . . . .	534
	Folgen im Komplexen . . . . .	534
	Reihen im Komplexen . . . . .	535
	Exponentialfunktion im Komplexen . . . . .	536
	Natürlicher Logarithmus im Komplexen . . . . .	536
	Allgemeine Potenz im Komplexen . . . . .	537
	Trigonometrische Funktionen im Komplexen . . . . .	537
	Hyperbelfunktionen im Komplexen . . . . .	538
	Inverse trigonometrische, inverse hyperbolische Funktionen im Komplexen . . . . .	540
17.4	Anwendungen komplexer Funktionen . . . . .	540
	Darstellung von Schwingungen in der komplexen Ebene . . . . .	540
	Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz . . . . .	541
	Ortskurven . . . . .	542
	Inversion von Ortskurven . . . . .	543
17.5	Ableitung von Funktionen einer komplexen Variablen . . . . .	544
	Definition der Ableitung im Komplexen . . . . .	544
	Ableitungsregeln im Komplexen . . . . .	544
	Cauchy-Riemannsche Differenzierbarkeitsbedingungen . . . . .	545
	Konforme Abbildungen . . . . .	545
17.6	Integration in der komplexen Ebene . . . . .	547
	Komplexe Kurvenintegrale . . . . .	547
	Cauchyscher Integralsatz . . . . .	548
	Stammfunktionen im Komplexen . . . . .	548
	Cauchysche Integralformeln . . . . .	549
	Taylorreihe einer analytischen Funktion . . . . .	549
	Laurentreihen . . . . .	550
	Klassifikation singulärer Punkte . . . . .	550
	Residuensatz . . . . .	551
	Inverse Laplacetransformation . . . . .	551
<b>18</b>	<b>Differentialgleichungen</b> . . . . .	<b>552</b>
18.1	Allgemeines . . . . .	552
18.2	Geometrische Interpretation . . . . .	553
18.3	Lösungsmethoden bei Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	554
	Trennung der Variablen . . . . .	554
	Substitution . . . . .	555
	Exakte Differentialgleichung . . . . .	555
	Integrierender Faktor . . . . .	556
18.4	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	556
	Variation der Konstanten . . . . .	556
	Allgemeine Lösung . . . . .	557
	Bestimmung einer partikulären Lösung . . . . .	557
	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	557
18.5	Einige spezielle Gleichungen . . . . .	558
	Bernoullische Differentialgleichung . . . . .	558
	Riccatische Differentialgleichung . . . . .	558
	Clairautsche Differentialgleichung . . . . .	558
18.6	Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . . .	559
	Einfache Spezialfälle . . . . .	559

18.7	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . . .	560
	Homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung . . . . .	561
	Inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung . . . . .	561
	Zurückführung spezieller Differentialgleichungen 2. Ordnung auf Differentialgleichungen	
	1. Ordnung . . . . .	562
	Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	562
18.8	Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung . . . . .	565
18.9	Systeme von gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	569
18.10	Systeme von linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	571
18.11	Partielle Differentialgleichungen . . . . .	573
	Lösung durch Separation . . . . .	573
18.12	Numerische Integration von Differentialgleichungen . . . . .	576
	Euler-Verfahren . . . . .	576
	Verfahren von Heun . . . . .	577
	Modifiziertes Euler-Verfahren . . . . .	578
	Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	579
	Runge-Kutta-Verfahren für Systeme von Differentialgleichungen . . . . .	583
	Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen . . . . .	584
	Die Methode der Finiten Elemente . . . . .	586
<b>19</b>	<b>Fourier-Transformation</b>	<b>588</b>
19.1	Fourier-Reihen . . . . .	588
	Einleitung . . . . .	588
	Definition und Koeffizienten . . . . .	588
	Konvergenzbedingung . . . . .	589
	Erweitertes Intervall . . . . .	590
	Symmetrien . . . . .	592
	Fourier-Reihe in komplexer und spektraler Darstellung . . . . .	593
	Formeln zur Berechnung von Fourier-Reihen . . . . .	594
	Fourier-Entwicklung einfacher periodischer Funktionen . . . . .	594
	Fourier-Reihen (Tabelle) . . . . .	600
19.2	Fourier-Integrale . . . . .	601
	Einleitung . . . . .	601
	Definition und Koeffizienten . . . . .	601
	Konvergenzbedingungen . . . . .	602
	Komplexe Darstellung, Fouriersinus- und -kosinustransformation . . . . .	602
	Symmetrien . . . . .	604
	Faltung und einige Rechenregeln . . . . .	604
19.3	Diskrete Fourier-Transformation (DFT) . . . . .	605
	Definition und Koeffizienten . . . . .	605
	Shannonsches Abtasttheorem . . . . .	606
	Diskrete Sinus- und Kosinustransformation . . . . .	607
	Fast-Fourier-Transformation (FFT) . . . . .	608
	Spezielle Paare von Fourier-Transformierten . . . . .	611
	Fourier-Transformierte (Tabelle) . . . . .	611
	Spezielle Fourier-Sinus-Transformierte . . . . .	613
	Spezielle Fourier-Kosinus-Transformierte . . . . .	614
19.4	Wavelet-Transformation . . . . .	615
	Signale . . . . .	615
	Lineare Signalanalyse . . . . .	615
	Symmetrietransformationen . . . . .	616
	Zeit-Frequenz-Analyse und Gabor-Transformation . . . . .	617
	Wavelet-Transformation . . . . .	618
	Diskrete Wavelet-Transformation . . . . .	622

<b>20</b>	<b>Laplace- und z-Transformation</b>	<b>624</b>
20.1	Einleitung	624
20.2	Definition der Laplace-Transformation	624
20.3	Transformationssätze	626
20.4	Partialbruchzerlegung	632
	Partialbruchzerlegung mit einfachen reellen Nullstellen	632
	Partialbruchzerlegung mit mehrfachen reellen Nullstellen	633
	Partialbruchzerlegung mit komplexen Nullstellen	633
20.5	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	634
	Laplace-Transformation: Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	635
	Laplace-Transformation: Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	636
	Beispiele: Lineare Differentialgleichungen	638
	Laplace-Transformierte (Tabelle)	640
20.6	z-Transformation	648
	Definition der z-Transformation	649
	Konvergenzbedingungen für die z-Transformation	650
	Umkehrung der z-Transformation	650
	Rechenregeln	651
	Rechenregeln zur z-Transformation	652
	Tabelle von z-Transformierten	653
<b>21</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik</b>	<b>656</b>
21.1	Kombinatorik	656
21.2	Zufällige Ereignisse	657
	Grundbegriffe	657
	Ereignisrelationen und Ereignisoperationen	658
	Strukturdarstellung von Ereignissen	660
21.3	Wahrscheinlichkeit von Ereignissen	661
	Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten	661
	Methoden zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	661
	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	662
	Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	662
21.4	Zufallsgrößen und ihre Verteilungen	664
	Einzelwahrscheinlichkeit, Dichtefunktion und Verteilungsfunktion	664
	Kenngößen von Verteilungen	665
	Spezielle diskrete Verteilungen	667
	Spezielle stetige Verteilungen	673
21.5	Grenzwertsätze	679
	Gesetze der großen Zahlen	679
	Grenzwertsätze	680
21.6	Mehrdimensionale Zufallsgrößen	681
	Verteilungsfunktionen zweidimensionaler Zufallsgrößen	681
	Zweidimensionale diskrete Zufallsgrößen	682
	Zweidimensionale stetige Zufallsgrößen	683
	Unabhängigkeit von Zufallsgrößen	684
	Kenngößen zweidimensionaler Zufallsgrößen	684
	Zweidimensionale Normalverteilung	685
21.7	Grundlagen der mathematischen Statistik	686
	Beschreibung von Messungen	687
	Fehlerarten	688
21.8	Kenngößen zur Beschreibung von Meßwertverteilungen	689
	Lageparameter, Mittelwerte von Meßreihen	689
	Streuungsparameter	691

21.9	Spezielle Verteilungen . . . . .	692
	Häufigkeitsverteilungen . . . . .	692
	Verteilung von Stichprobenfunktionen . . . . .	693
21.10	Stichproben-Analyseverfahren (Test- und Schätztheorie) . . . . .	697
	Schätzverfahren . . . . .	698
	Konstruktionsprinzipien für Schätzfunktionen . . . . .	699
	Momentenmethode . . . . .	699
	Maximum-Likelihood-Verfahren . . . . .	700
	Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	700
	$\chi^2$ -Minimum-Methode . . . . .	701
	Methode der Quantile, Perzentile . . . . .	701
	Intervallschätzung . . . . .	702
	Intervallgrenzen bei Normalverteilung . . . . .	703
	Prognose- und Konfidenzintervallgrenzen bei Binomialverteilung und hypergeometrischer Verteilung . . . . .	704
	Intervallgrenzen bei Poisson-Verteilung . . . . .	705
	Bestimmung des Stichprobenumfangs $n$ . . . . .	705
	Prüfverfahren . . . . .	706
	Parametertests . . . . .	708
	Parametertests bei der Normalverteilung . . . . .	709
	Hypothesen über den Mittelwert beliebiger Verteilungen . . . . .	711
	Hypothesen über $p$ von Binomial- und hypergeometrischen Verteilungen . . . . .	711
	Anpassungstests . . . . .	711
	Anwendung: Annahmestichproben- und Ausschußprüfung . . . . .	712
21.11	Zuverlässigkeit . . . . .	713
21.12	Ausgleichsrechnung, Regression . . . . .	715
	Lineare Regression, Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	716
	Regression $n$ -ter Ordnung . . . . .	718
<b>22</b>	<b>Fuzzy-Logik</b> . . . . .	<b>719</b>
22.1	Unschärfe Menge . . . . .	719
22.2	Fuzzy-Konzept . . . . .	720
22.3	Funktionsgraphen für die Modellierung unscharfer Mengen . . . . .	720
22.4	Verknüpfung unscharfer Mengen . . . . .	723
	Elementare Operationen . . . . .	723
	Rechengesetze für unscharfe Mengen . . . . .	726
	Regeln für Familien unscharfer Mengen . . . . .	726
	t-Norm und t-Konorm . . . . .	727
	Nichtparametrisierte Operatoren: t-Normen und s-Normen (t-Konormen) . . . . .	728
	Parametrisierte t- und s-Normen . . . . .	729
	Kompensatorische Operatoren . . . . .	730
22.5	Fuzzy-Relationen . . . . .	730
22.6	Fuzzy-Inferenz . . . . .	732
22.7	Defuzzifizierungsmethoden . . . . .	734
22.8	Beispiel: inverses Pendel . . . . .	735
22.9	Fuzzy-Realisierungen . . . . .	738
<b>23</b>	<b>Neuronale Netze</b> . . . . .	<b>740</b>
23.1	Arbeitsweise und Struktur . . . . .	740
	Arbeitsweise . . . . .	740
	Struktur . . . . .	741
23.2	Umsetzung des Neuronen-Modells . . . . .	741
	Zeitunabhängige Systeme . . . . .	741
	Zeitabhängige Systeme . . . . .	742

---

Verwendung . . . . .	742
23.3 Überwachtes Lernen . . . . .	743
Prinzip des überwachten Lernens . . . . .	743
Standard Backpropagation . . . . .	744
Backpropagation Through Time . . . . .	745
Verbesserte Lernmethoden . . . . .	747
Hopfield-Netz . . . . .	747
23.4 Unüberwachtes Lernen . . . . .	749
Prinzip des unüberwachten Lernens . . . . .	749
Kohonen-Modell . . . . .	749
<b>24 Nutzung von Computern</b> . . . . .	<b>751</b>
24.1 Betriebssysteme . . . . .	751
Einführung in MS-DOS . . . . .	753
Einführung in UNIX . . . . .	754
24.2 Höhere Programmiersprachen . . . . .	757
Programmstrukturen . . . . .	757
Objektorientierte Programmierung . . . . .	759
24.3 Grundstruktur . . . . .	762
24.4 Variablen und Typen . . . . .	762
Ganze Zahlen . . . . .	763
Reelle Zahlen . . . . .	763
Boolesche Werte . . . . .	763
Felder, ARRYS . . . . .	763
Zeichen und Zeichenketten . . . . .	764
Datensätze RECORDS . . . . .	765
Zeiger . . . . .	765
Selbstdefinierte Typen . . . . .	766
24.5 Anweisungen . . . . .	767
Zuweisungen und Ausdrücke . . . . .	767
Ein- und Ausgabe . . . . .	769
Verbundanweisung . . . . .	769
Bedingte Anweisungen IF und CASE . . . . .	770
Schleifen FOR, WHILE und REPEAT . . . . .	771
24.6 Prozeduren und Funktionen . . . . .	772
Prozeduren . . . . .	772
Funktionen . . . . .	773
Lokale und globale Variablen, Parameterübergabe . . . . .	773
24.7 Rekursion . . . . .	775
24.8 Grundlegende Algorithmen . . . . .	776
Dynamische Datenstrukturen . . . . .	776
Suchen . . . . .	777
Sortieren . . . . .	778
24.9 Computergrafik . . . . .	779
Grundfunktionen . . . . .	779
Grundstrukturen . . . . .	781
Operatoren . . . . .	782
Datenstrukturen . . . . .	784
Schleifen und Verzweigungen . . . . .	787
Variablen und Konstanten . . . . .	790
Überladen von Funktionen . . . . .	790
Überladen von Operatoren . . . . .	790
Klassen . . . . .	791
Instantiierung von Klassen . . . . .	792



friend-Funktionen . . . . .	792
Operatoren als Memberfunktionen . . . . .	792
Konstruktoren . . . . .	793
Abgeleitete Klassen (Vererbung) . . . . .	794
Klassenbibliotheken . . . . .	794
Programmaufbau . . . . .	796
Datenstrukturen . . . . .	796
Operatoren . . . . .	799
Schleifen und Verzweigungen . . . . .	799
Unterprogramme . . . . .	800
Strukturelemente von Mathematica . . . . .	803
Strukturelemente von Maple . . . . .	806
Algebraische Ausdrücke . . . . .	808
Gleichungen und Gleichungssysteme . . . . .	809
Lineare Algebra . . . . .	810
Differential- und Integralrechnung . . . . .	811
Programmierung . . . . .	813
Kurvenanpassung und Interpolation mit Mathematica . . . . .	814
Grafik . . . . .	814
<b>25 Integraltafeln</b>	<b>816</b>
25.1 Integrale rationaler Funktionen . . . . .	816
Integrale mit $P = ax + b$ $a \neq 0$ . . . . .	816
Integrale mit $x^m/(ax + b)^n$ , $P = ax + b$ , $a \neq 0$ . . . . .	816
Integrale mit $1/(x^n(ax + b)^m)$ , $P = ax + b$ $b \neq 0$ . . . . .	817
Integrale mit $ax + b$ und $cx + d$ $c \neq 0$ . . . . .	818
Integrale mit $a + x$ und $b + x$ $a \neq b$ . . . . .	819
Integrale mit $P = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$ . . . . .	819
Integrale mit $x^n/(ax^2 + bx + c)^m$ , $P = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$ . . . . .	819
Integrale mit $1/(x^n(ax^2 + bx + c)^m)$ , $P = ax^2 + bx + c$ $c \neq 0$ . . . . .	820
Integrale mit $P = a^2 \pm x^2$ . . . . .	820
Integrale mit $1/(a^2 \pm x^2)^n$ , $P = a^2 \pm x^2$ $a \neq 0$ . . . . .	821
Integrale mit $x^n/(a^2 \pm x^2)^m$ , $P = a^2 \pm x^2$ $a \neq 0$ . . . . .	821
Integrale mit $1/(x^n(a^2 \pm x^2)^m)$ $P = a^2 \pm x^2$ $a \neq 0$ . . . . .	822
Integrale mit $P = a^3 \pm x^3$ $a \neq 0$ . . . . .	823
Integrale mit $a^4 + x^4$ $a > 0$ . . . . .	824
Integrale mit $a^4 - x^4$ $a > 0$ . . . . .	824
25.2 Integrale irrationaler Funktionen . . . . .	824
Integrale mit $x^{1/2}$ und $P = ax + b$ $a, b \neq 0$ . . . . .	824
Integrale mit $(ax + b)^{1/2}$ , $P = ax + b$ $a \neq 0$ . . . . .	825
Integrale mit $(ax + b)^{1/2}$ und $(cx + d)^{1/2}$ $a, c \neq 0$ . . . . .	826
Integrale mit $R = (a^2 + x^2)^{1/2}$ $a \neq 0$ . . . . .	827
Integrale mit $S = (x^2 - a^2)^{1/2}$ $a \neq 0$ . . . . .	828
Integrale mit $T = (a^2 - x^2)^{1/2}$ $a \neq 0$ . . . . .	830
Integrale mit $(ax^2 + bx + c)^{1/2}$ , $X = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$ . . . . .	831
25.3 Integrale transzendenter Funktionen . . . . .	832
Integrale mit Exponentialfunktionen $a \neq 0$ . . . . .	832
Integrale mit logarithmischen Funktionen $x > 0$ . . . . .	833
Integrale mit Hyperbelfunktionen ( $a \neq 0$ ) . . . . .	835
Integrale mit inversen Hyperbelfunktionen . . . . .	836
Integrale mit Sinus- oder Kosinusfunktionen ( $a \neq 0$ ) . . . . .	836
Integrale mit Sinus- und Kosinusfunktionen $a \neq 0$ . . . . .	840
Integrale mit Tangens- oder Kotangensfunktionen $a \neq 0$ . . . . .	843

	Integrale mit inversen trigonometrischen Funktionen $a \neq 0$ .....	844
25.4	Bestimmte Integrale .....	845
	Bestimmte Integrale mit algebraischen Funktionen .....	845
	Bestimmte Integrale mit Exponentialfunktionen .....	846
	Bestimmte Integrale mit logarithmischen Funktionen .....	847
	Bestimmte Integrale mit trigonometrischen Funktionen .....	848
<b>Sachwortverzeichnis</b>		<b>850</b>

# 1 Zahlenrechnen (Arithmetik und Numerik)

## 1.1 Mengen

**Menge**, die Zusammenfassung bestimmter **wohlunterscheidbarer** Objekte (**Elemente der Menge**) zu einem Ganzen. Mengen werden mit großen Buchstaben, z. B.  $X$ , Elemente der Menge mit kleinen Buchstaben, z. B.  $p, x$ , gekennzeichnet.

Man schreibt  $p \in X$ , wenn  $p$  **Element** von  $X$  ist und  $p \notin X$ , wenn  $p$  nicht Element der Menge  $X$  ist.

### Darstellung von Mengen

**Aufzählung** ihrer Elemente,

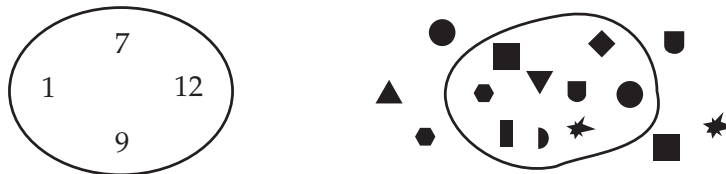
$X = \{1, 2, 3, 4\}$ .

**Charakterisierung** durch eine definierende Eigenschaft  $E$  der Elemente  $p$ , man schreibt

$X = \{p \mid p \text{ genügt der Eigenschaft } E\}$ .

- Die Menge aller in Deutschland lebenden Menschen,  
 $\{\text{Mensch} \mid \text{Mensch lebt in Deutschland}\}$ ,  
die Menge der reellen Zahlen,  $\mathbb{R} = \{z \mid z \text{ ist reell}\}$ .

**Venn-Diagramm**, Grafik, bei der eine Menge in der Ebene symbolisch durch eine Punktmenge – berandet von einer geschlossenen Kurve – dargestellt wird.



Venn-Diagramme

**Leere Menge**  $\emptyset = \{\}$ .

▷ Die leere Menge enthält kein Element, auch nicht die Null!

$\{0\} \neq \emptyset, \quad \{0\} \neq \{\}$ .

**Gleichheit von Mengen:** Man nennt zwei Mengen  $X$  und  $Y$  **gleich**, wenn jedes Element aus  $X$  auch Element von  $Y$  **und** jedes Element aus  $Y$  **auch** Element von  $X$  ist.

Schreibweise:  $X = Y$ .

**Mächtigkeit von Mengen:** Man nennt zwei Mengen  $X$  und  $Y$  **gleichmächtig**, wenn es eine eindeutige Abbildung der Elemente aus  $X$  auf die Elemente aus  $Y$  gibt, d. h., wenn jedem Element aus  $X$  **genau ein** Element aus  $Y$  zugeordnet werden kann (siehe auch unter Begriff Abbildung).

▷ Endliche Mengen sind gleichmächtig, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen besitzen.

Alle 20elementigen Mengen sind gleichmächtig.

Die Menge der natürlichen Zahlen und die Menge der rationalen Zahlen sind gleichmächtig.

**Teilmenge** oder **Untermenge:** Eine Menge  $Y$  ist enthalten in einer anderen Menge  $X$  ( $Y$  ist eine **echte Teilmenge** von  $X$ , Schreibweise:  $Y \subset X$  oder  $X \supset Y$ ), wenn jedes Element  $x \in Y$  auch Element von  $X$  ist und  $X$  und  $Y$  nicht identisch sind.

$\{1, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ .

Die Menge der Zweifamilienhäuser ist Teilmenge der Menge aller Gebäude.

▷  $X \subset Y$  und  $Y \subset X \implies X = Y$ .

$X$  ist **unechte Teilmenge** von  $Y$  (und umgekehrt).