

# **Technische Mechanik**

## **Band 2: Festigkeitslehre**





Edition  
Harri   
Deutsch 

# Technische Mechanik

## Band 2: Festigkeitslehre

von

Peter Hagedorn

Jörg Wallaschek

**5., vollständig überarbeitete Auflage**

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG  
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

**Europa-Nr.: 56900**

**Autoren:**

Prof. Dr. Peter Hagedorn vertritt an der Technischen Universität Darmstadt das Fach Technische Mechanik in Lehre und Forschung. Er hat jahrzehntelang Vorlesungen über Technische Mechanik und über Technische Schwingungslehre für Hörer unterschiedlicher Fachrichtungen gehalten.

Professor Dr.-Ing. Jörg Wallaschek ist Direktor des Institutes für Dynamik und Schwingungen an der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover und vertritt die Fächer Technische Mechanik und Maschinendynamik in der Fakultät für Maschinenbau.

5., vollständig überarbeitete Auflage 2015

Druck 5 4 3 2

ISBN 978-3-8085-5691-7

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2015 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten  
[www.europa-lehrmittel.de](http://www.europa-lehrmittel.de)

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald  
Druck: Plump Druck & Medien GmbH, 53619 Rheinbreitbach

# Vorwort zur fünften Auflage

Die drei Bände zur Technischen Mechanik von Peter Hagedorn haben inzwischen große Verbreitung als Lehrbücher an Universitäten und Fachhochschulen gefunden. Mit der vorliegenden 5. Auflage ist Jörg Wallaschek als Ko-Autor dazu gekommen.

Ein wesentlicher Teil der Überarbeitung der neuen Auflage durch den Erstautor erfolgte während Gastaufenthalten am Department of Mechanical Engineering der University of Canterbury, Christchurch, Neuseeland. Der Erstautor dankt dem Department für die freundliche Aufnahme und dafür, dass das Department die Infrastruktur zur Verfügung gestellt hat.

Das bewährte Konzept zur Einführung der Grundbegriffe und mathematischen Hilfsmittel wurde beibehalten. Text, Abbildungen und Aufgaben wurden behutsam überarbeitet und an einigen Stellen ergänzt, um das Buch noch besser auf die Anforderungen der Ingenieur-Ausbildung abzustimmen. Die Abbildungen wurden farbig gestaltet, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen.

Bei der Erstellung der Zeichnungen und des druckfertigen Manuskripts wurden wir von Herrn M. Sc. Henrik Westermann und Herrn Dipl. Ing. Martin Zimmermann sowie Frau Parsamanesh, Frau Wiechens und Herrn Ohrdes tatkräftig unterstützt, wofür wir herzlich Dank sagen.

Wir danken dem Verlag Europa-Lehrmittel Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG für die sehr gute Betreuung unseres Buchprojektes und insbesondere unserem Lektor, Herrn Klaus Horn für die vertrauensvolle Zusammenarbeit.

Darmstadt / Hannover, im März 2015

Peter Hagedorn  
hagedorn@dyn.tu-darmstadt.de

Jörg Wallaschek  
mechanik@wallaschek.eu

## Vorwort zur vierten Auflage

Dieser Band entspricht dem zweiten Teil einer dreisemestrigen Vorlesung, die ich seit zirka 30 Jahren für Hörer verschiedener Fachrichtungen an der Technischen Universität Darmstadt halte; zwei weitere Bände behandeln die *Statik* und die *Dynamik*. Niveau und Aufbau der drei Bücher orientieren sich an den Lehrveranstaltungen, wie sie besonders für Ingenieur-Studenten an praktisch allen Hochschulen angeboten werden.

Die unterschiedliche Vorbildung, die unsere Studenten von der Schule mitbringen, hat zur Folge, dass in den Vorlesungen für die Erstsemester Grundbegriffe und mathematische Hilfsmittel sehr elementar eingeführt werden müssen. Ich war in dem vorliegenden Buch bemüht, das Gebäude der Mechanik auf dem soliden Fundament dieser Grundlagen systematisch aufzubauen. Die freundliche Aufnahme des Buches, die sehr schnell Neuauflagen notwendig machte, zeigt mir, dass dies zumindest teilweise gelungen ist.

Dank des Einsatzes der Herren Dipl.-Ing. Daniel Hochlenert und Dipl.-Ing. Florian Fischer war es möglich, in den vergangenen Monaten die gesamte Reihe von Grund auf zu überarbeiten, sodass die drei Bände jetzt zeitgleich in einem neuen Layout erscheinen, wobei die Bände 1 und 2 nun in der 4. Auflage und der dritte Band in der 3. Auflage vorliegen. Dabei wurden in allen drei Bänden zahlreiche Verbesserungen, neue Beispiele und – bei der numerischen Behandlung von Aufgaben mittels MATLAB, insbesondere in den Bänden 1 und 3 – eine Reihe von Ergänzungen vorgenommen. Viele dieser Änderungen gehen direkt auf Anregungen der Herren Hochlenert und Fischer zurück, die auch die Erstellung der reproduktionsfähigen Vorlagen überwacht haben. Ich danke beiden für den unermüdlichen Einsatz, ohne sie wäre die Überarbeitung in dieser kurzen Zeit überhaupt nicht möglich gewesen. Manche Kollegen und viele Studenten haben mich in der Vergangenheit auf mögliche Verbesserungen hingewiesen, die hier eingearbeitet wurden. Ihnen allen sei an dieser Stelle gedankt.

Dem Verlag Harri Deutsch danke ich für die bewährt gute Zusammenarbeit.

Peter Hagedorn

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung: Spannungen und Dehnungen</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Der Stab, das HOOKESche Gesetz</b>	<b>11</b>
2.1	Das HOOKESche Gesetz, Querkontraktion	11
2.2	Temperaturdehnung	13
2.3	Beispiele	14
2.4	Zusammenfassung	33
<b>3</b>	<b>Ebener und räumlicher Spannungs- und Verzerrungszustand</b>	<b>35</b>
3.1	Spannungen im schiefen Schnitt am Dehnstab	35
3.2	Der räumliche Spannungszustand	37
3.3	Der ebene Spannungszustand, MOHRsche Kreise	45
3.4	Der ebene und der räumliche Verzerrungszustand	60
3.5	Spannungs-Dehnungs-Beziehungen	63
3.6	Zusammenfassung	69
<b>4</b>	<b>Biegung</b>	<b>73</b>
4.1	Spannungsverteilung bei gerader Biegung	73
4.2	Die Gleichung der elastischen Linie	81
4.3	Flächenträgheitsmomente	84
4.4	Schiefe Biegung	96
4.5	Biegung und Normalkraft	99
4.6	Das FÖPPL-Symbol	101
4.7	Beispiele	106
4.8	Zusammenfassung	121
<b>5</b>	<b>Schubspannungen infolge Querkraft bei Biegung</b>	<b>125</b>
5.1	Balken mit symmetrischem Vollquerschnitt	125
5.2	Dünnwandige offene Querschnitte und der Schubmittelpunkt*	132
5.3	Vergleich der Verformungen und Spannungen infolge Biegung und Schub	138
5.4	Zusammenfassung	139
<b>6</b>	<b>Torsion</b>	<b>141</b>
6.1	Kreis- und Kreisringquerschnitt	141
6.2	Überlagerung von Torsion und Biegung in kreiszylindrischen Stäben	147
6.3	Dünnwandige geschlossene Hohlquerschnitte*	149
6.4	Torsion beliebiger konstanter Vollquerschnitte*	153
6.5	Offene dünnwandige Querschnitte	162
6.6	Beispiele	163
6.7	Zusammenfassung	174

<b>7</b>	<b>Energiemethoden in der Festigkeitslehre</b> . . . . .	177
7.1	Energieerhaltung, der Arbeitssatz . . . . .	177
7.2	Elastische Deformationsenergie bei Balken und Stäben . . . . .	182
7.3	Das Prinzip der virtuellen Kräfte . . . . .	186
7.4	Der Satz von CASTIGLIANO . . . . .	189
7.5	Statisch unbestimmte Systeme . . . . .	199
7.6	Weitere Beispiele . . . . .	207
7.7	Zusammenfassung . . . . .	215
<b>8</b>	<b>Knickprobleme</b> . . . . .	219
8.1	Knicken als Verzweigungsproblem . . . . .	219
8.2	Stabilität und Knicken . . . . .	229
8.3	Zusammenfassung . . . . .	233
<b>9</b>	<b>Ergänzungen zur Festigkeitslehre*</b> . . . . .	235
9.1	Festigkeitsannahmen . . . . .	235
9.2	Kerbspannungen . . . . .	238
9.3	Gleichgewichtsbedingungen und LAMÉ-NAVIERSchen Gleichungen . . . . .	239
9.4	Spannungstrajektorien . . . . .	240
<b>10</b>	<b>Aufgaben mit Lösungen</b> . . . . .	243
10.1	Ebene und räumliche Spannungs- und Dehnungszustände . . . . .	243
10.1.1	Dünnwandiger Druckbehälter unter Torsion . . . . .	243
10.1.2	Bestimmung des Elastizitätsmoduls . . . . .	245
10.1.3	Einbau einer elastischen Scheibe . . . . .	246
10.1.4	Thermoskanne mit Gummistopfen . . . . .	247
10.1.5	Zugstab mit Klebefuge . . . . .	249
10.1.6	Volumenänderung eines Stabes . . . . .	250
10.1.7	Konischer Stab unter Eigengewicht . . . . .	251
10.2	Zug, Biegung und Torsion . . . . .	252
10.2.1	Beidseitig eingespannter Balken . . . . .	252
10.2.2	Geneigtes dünnwandiges Rohr . . . . .	253
10.2.3	Stab in elastischer Halterung . . . . .	254
10.2.4	Dünnwandiger Kragträger . . . . .	256
10.2.5	Dünnwandiger Träger mit Seil . . . . .	258
10.2.6	Kragträger mit L-Profil . . . . .	259
10.3	Verformung statisch bestimmter Systeme . . . . .	261
10.3.1	Verformung eines Winkels unter quadratischer Streckenlast . . . . .	261
10.3.2	Hebevorrichtung mit Seil . . . . .	263
10.3.3	Tragwerk aus Balken und Stäben . . . . .	265
10.3.4	Lagerbock . . . . .	267
10.3.5	Hebebühne und Verdrehung . . . . .	269
10.3.6	Abgewinkelter Balken mit Stäben . . . . .	271
10.3.7	Räumliches System aus Balken und Stab . . . . .	273
10.3.8	Wäscheleine zwischen elastischen Balken . . . . .	274

10.4	Statisch unbestimmte Systeme . . . . .	276
10.4.1	Balken mit kubischer Streckenlast . . . . .	276
10.4.2	Schwerer elastischer Winkel . . . . .	278
10.4.3	Rohrleitung mit Dehnungsschleife . . . . .	281
10.4.4	Fachwerk . . . . .	284
10.4.5	Fachwerk mit waagrechter Lagerverschiebung . . . . .	286
10.4.6	Vorspannung eines Balkens infolge Klaffung . . . . .	286
10.4.7	Rahmen mit Versteifung durch Seil . . . . .	288
10.4.8	Winkel mit erwärmtem Stab . . . . .	290
10.4.9	Räumliches Tragwerk . . . . .	292
10.4.10	Eingespannter Rahmen mit gefederter Abstützung . . . . .	294
<b>A</b>	<b>Ergänzungen zum räumlichen Spannungszustand . . . . .</b>	<b>297</b>
A.1	Das Eigenwertproblem des Spannungstensors . . . . .	297
<b>B</b>	<b>Tabellen . . . . .</b>	<b>301</b>
B.1	Flächenträgheitsmomente . . . . .	301
B.2	Torsion . . . . .	302
B.3	Biegelinien . . . . .	303
B.4	Integrationstafel . . . . .	305
<b>Index</b>	<b>. . . . .</b>	<b>307</b>

Die mit \* gekennzeichneten Abschnitte können bei einer ersten Lektüre weggelassen werden.



# 1 Einführung: Spannungen und Dehnungen

In allen technischen Konstruktionen müssen die Komponenten so bemessen werden, dass sie den auftretenden Kräften standhalten und sich nicht übermäßig verformen. Sie müssen hinreichende *Festigkeit* und hinreichende *Steifigkeit* besitzen. Dieses Festlegen der Abmessungen wird als *Dimensionieren* bezeichnet. Die Bedeutung der Dimensionierung ist unmittelbar einleuchtend: Man denke an die Wahl der Wandstärke eines Druckbehälters, die Festlegung eines Wellendurchmessers, die Bemessung eines Gebäudes usw., bei denen eine falsche Auslegung zu großen Schäden führen kann. Die Dimensionierung bezüglich der Festigkeit geschieht über die Berechnung der mechanischen *Spannungen* und den Vergleich mit gewissen, für den Werkstoff vorgegebenen *zulässigen Spannungen*. Dieser Vergleich wird oft nicht mit den wirklichen Spannungen, sondern mit *Vergleichsspannungen* durchgeführt (s. Kapitel 9). Bei der Dimensionierung bezüglich der Steifigkeit werden die Abmessungen so festgelegt, dass die Verformungen hinreichend klein bleiben. In einem Getriebe beispielsweise müssen die Wellen so steif sein, dass die Verformungen nicht das saubere „Kämmen“ der Zahnräder ineinander beeinflussen, und die Steifigkeit eines Hochhauses ist u.a. so festzulegen, dass die winderregten Gebäudeschwingungen das Wohlbefinden der Bewohner nicht beeinträchtigen.

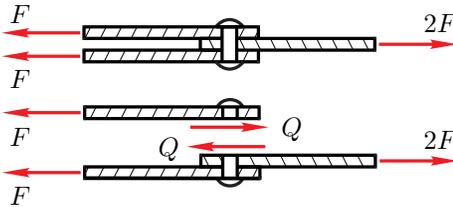
In diesem Band befassen wir uns mit der Statik verformbarer, fester Körper, die wir als linear-elastisch, homogen und isotrop annehmen, sofern nichts anderes gesagt ist (homogen = gleichartig, an jedem Punkt gleiche Materialeigenschaften; isotrop = nach allen Richtungen hin gleiche Eigenschaften aufweisend; Holz ist z.B. nicht isotrop; es verhält sich in Faserrichtung anders als quer dazu). Viele in der Technik übliche Werkstoffe haben zumindest bei hinreichend kleinen Spannungen näherungsweise diese Eigenschaften. Die mathematisch und physikalisch konsistente Untersuchung solcher Körper ist Gegenstand der *Elastizitätstheorie*, die aber hier nicht behandelt wird. Für viele Probleme der Technik genügt es nämlich, eine vereinfachte Theorie zu verwenden, die unter dem Namen *Festigkeitslehre* bekannt ist (im Englischen: *strength of materials*, *mechanics of materials*). Die Bezeichnung ist unglücklich gewählt, da in der Festigkeitslehre nicht Materialeigenschaften untersucht, sondern näherungsweise *Spannungen und Dehnungen* berechnet werden. Der Begriff „Festigkeitslehre“ hat sich jedoch allgemein eingebürgert, sodass auch wir ihn im Folgenden verwenden.

Die Festigkeitslehre unterscheidet sich von der Elastizitätstheorie also dadurch, dass zusätzliche Annahmen getroffen werden, die ihre Gültigkeit einschränken. Sie ist mathematisch nicht widerspruchsfrei, liefert jedoch bei sinnvoller Anwendung gute Ergebnisse. Die Festigkeitslehre grenzt an die *Werkstoffkunde*, wo Eigenschaften und Aufbau der Werkstoffe sowie deren Beeinflussung (z.B. Wärmebehandlung) untersucht werden.

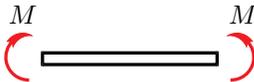
Die Schwierigkeit der Bestimmung von Spannungen und Verformungen von Bauteilen hängt ganz wesentlich auch von ihrer Geometrie ab. Bei komplizierter Geometrie kann das Problem nur numerisch, z.B. mit dem *Verfahren der Finiten Elemente* gelöst werden. Für einfache Bauteile wie z.B. Stäbe und Balken kann man aber leicht formelmäßige Berechnungen durchführen, und auf solche beschränken wir uns hier.



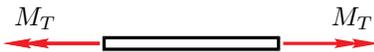
1.1a: Zug



1.1b: Schub (im Niet)



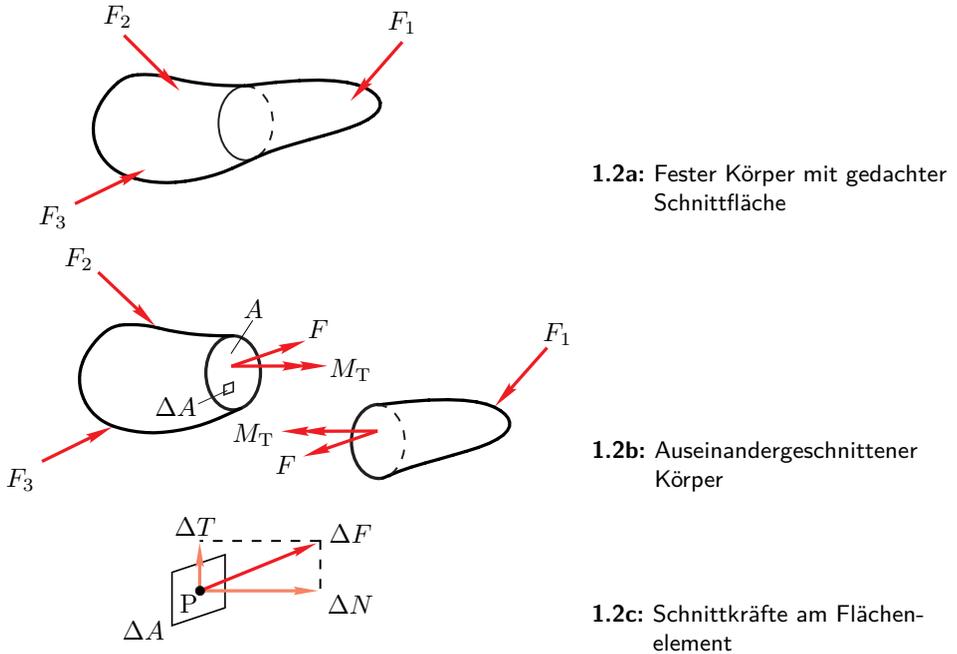
1.1c: Biegung



1.1d: Torsion

In TM 1 (Technische Mechanik, Band 1: Statik) haben wir die an einer beliebigen Stelle eines Balkens wirkenden Schnittkräfte und -momente infolge einer gegebenen Belastung berechnet. Wir bezeichnen diese Größen hier als *Beanspruchungen*. In Abb. 1.1 sind schematisch diese schon bekannten Beanspruchungsarten Zug, Schub, Biegung und Torsion gekennzeichnet; meist treten in einem Balken gleichzeitig mehrere Beanspruchungsarten auf. Der Ausdruck „Beanspruchung“ wird in der Festigkeitslehre auch gelegentlich für die Spannungen verwendet.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Verteilung der Schnittkräfte über die Schnittflächen, d.h. mit den *Spannungen*. Diesen Begriff erklären wir an dem festen Körper der Abb. 1.2a, den wir mittels einer beliebigen Schnittebene gedanklich zerschneiden. Die in Abb. 1.2b dargestellten Schnittkräfte und -momente können jeweils aus den Gleichgewichtsbedingungen für den linken oder für den rechten Teilkörper gewonnen werden. In TM 1 hatten wir schon erkannt, dass die Schnittkräfte stetig über die Schnittfläche verteilt und zur Bestimmung dieser Verteilung zusätzliche Annahmen notwendig sind. Wir betrachten nun ein kleines Flächenelement  $\Delta A$  der Schnittfläche, das den Punkt P enthält ( $\Delta =$  „Delta“). Es sei  $\Delta \mathbf{F}$  die auf dieses



Flächenelement wirkende Schnittkraft, dann definieren wir den *Spannungsvektor* gemäß

$$\mathbf{p} := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{F}}{dA}. \quad (1.1)$$

Der Spannungsvektor hängt i.a. sowohl vom Punkt P als auch von der Neigung der Schnittfläche ab.

Wir zerlegen  $\Delta \mathbf{F}$  in die Normalkomponente  $\Delta N$  und die Komponente  $\Delta T$ , die in der Schnittebene selbst liegt. Mit dem Quotienten  $\Delta N/\Delta A$  erhalten wir die *Normalspannung*

$$\sigma := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{dN}{dA} \quad (1.2)$$

am Punkt P für die gewählte Schnittfläche ( $\sigma = \text{„sigma“}$ ). Bei  $\sigma > 0$  spricht man von einer *Zugspannung*, bei  $\sigma < 0$  von einer *Druckspannung*. Ganz entsprechend definieren wir die *Schubspannung*

$$\tau := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} = \frac{dT}{dA} \quad (1.3)$$

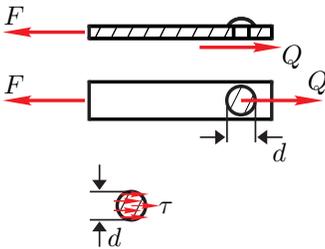
( $\tau = \text{„tau“}$ ). Mithilfe der Komponenten  $\sigma$  und  $\tau$  kann der Spannungsvektor im Punkt P für die vorgegebene Orientierung der Schnittebene ausgedrückt werden.

Spannungen sind üblicherweise in den Einheiten  $\text{N}/\text{mm}^2$  gegeben. Die Druckeinheiten Pascal<sup>1</sup> ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2$ ) und bar ( $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N}/\text{m}^2 \approx 1 \text{ at}$ ) sind in der Festigkeitslehre unüblich.

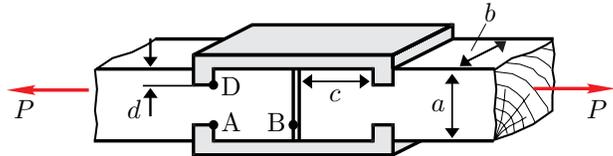
Besonders einfach sind Spannungen dann zu bestimmen, wenn sie gleichmäßig über die Schnittfläche verteilt sind. Dies nimmt man z.B. bei der Beanspruchung von Nieten auf Schub gemäß Abb. 1.1b an. Falls  $F = Q = 3000 \text{ N}$  gegeben ist und der Niet aus einem Material mit zulässiger Schubspannung  $\tau_{\text{zul}} = 120 \text{ N}/\text{mm}^2$  gefertigt werden soll, so bestimmt sich sein Durchmesser unter der Annahme gleichmäßiger Spannungsverteilung (Abb. 1.3) aus

$$\tau = \frac{F}{\pi d^2/4} \leq \tau_{\text{zul}} \quad (1.4)$$

zu  $d \geq \sqrt{4F/\pi\tau_{\text{zul}}} \approx 5,64 \text{ mm}$ ; man wird also z.B.  $d = 6 \text{ mm}$  wählen. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass dies nur ein Aspekt der Dimensionierung von Nieten ist, die durch Normen genauer geregelt wird. Ebenso sei darauf hingewiesen, dass bei der Festlegung der zulässigen Schubspannung zahlreiche Überlegungen eingehen, die wir erst später diskutieren.



1.3: Schubspannungen im Niet



1.4: Verbindung von hölzernen Zugstäben

Als zweites Beispiel betrachten wir **zwei hölzerne Zugstäbe mit Rechteckquerschnitt**, die gemäß Abb. 1.4 durch zwei Stahlklammern so verbunden werden sollen, dass die Längskraft  $P = 120 \text{ kN}$  übertragen werden kann. Gegeben sind  $b = 200 \text{ mm}$  sowie die im verwendeten Holz maximal zulässigen Spannungen  $\tau_{\text{zul}} = 1,5 \text{ N}/\text{mm}^2$  und  $\sigma_{\text{zul}} = 6 \text{ N}/\text{mm}^2$  (längs der Faserrichtung). Die Größen  $a$ ,  $c$ ,  $d$  sind so zu bestimmen, dass die Spannungen im Holz diese zulässigen Werte nicht überschreiten. Zunächst berechnen wir  $c$  aus der Bedingung, dass das Holz nicht längs AB abschert:

$$\tau = \frac{P/2}{cb} \leq \tau_{\text{zul}}; \quad (1.5)$$

daraus folgt  $c \geq P/(2b\tau_{\text{zul}}) = 200 \text{ mm}$ . Den Wert von  $d$  erhalten wir aus der Bedingung, dass das Holz an den lotrechten Flächen der Klammern keine zu großen

<sup>1</sup> Nach Blaise PASCAL, französischer Philosoph, Mathematiker und Physiker, \*1623 in Clermont-Ferrand, †1662 in Paris.

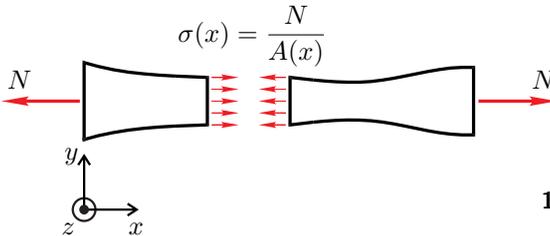
Druckspannungen (*Pressung*) erfährt:

$$\sigma = \frac{P/2}{db} \leq \sigma_{\text{zul}}; \quad (1.6)$$

es ist  $d \geq P/(2b\sigma_{\text{zul}}) = 50$  mm. Schließlich folgt  $a$  daraus, dass der Balken an der Schwachstelle AD nicht auseinander gerissen werden darf:

$$\sigma = \frac{P}{(a-2d)b} \leq \sigma_{\text{zul}}; \quad (1.7)$$

damit ist  $a \geq 2d + P/(b\sigma_{\text{zul}}) = 200$  mm. In diesem Beispiel haben wir angenommen, dass die Spannungen über die jeweiligen Flächen stets gleichmäßig verteilt sind. Auch hier sei angemerkt, dass diese Dimensionierung nur eine grobe Abschätzung darstellt.



1.5: Spannungen im Dehnstab

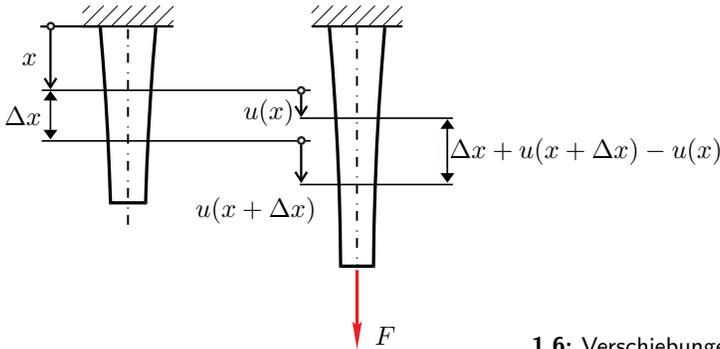
Für den Dehnstab der Abb. 1.5 gilt in guter Näherung, dass die Spannungen über den gesamten Querschnitt der Fläche  $A(x)$  konstant sind, sodass

$$\sigma(x) = \frac{N}{A(x)} \quad (1.8)$$

ist. Lediglich in der Nähe der Orte der Krafteinleitung gilt die Annahme der konstanten Normalspannungen nicht. Die in Abb. 1.5 an den Stabenden eingezeichneten Einzelkräfte sind bei elastischen Materialien eigentlich nicht zulässig. Es zeigt sich aber, dass bei dem hier betrachteten Dehnstab und vielen anderen Problemen die Spannungsverteilung in einer gewissen Entfernung vom Einleitungsort nur noch geringfügig von der Art der Krafteinleitung abhängt. Diesen Sachverhalt bezeichnet man als *SAINT-VENANTSches Prinzip*<sup>2</sup>; es wird uns im folgenden an verschiedenen Stellen immer wieder begegnen. Allerdings ist die Bezeichnung „Prinzip“ an dieser Stelle nicht korrekt, denn beim Prinzip von SAINT-VENANT handelt es sich um einen in der Regel gültigen Erfahrungssatz und nicht um ein allgemein gültiges Naturgesetz. Es gibt durchaus Beispiele, in denen das SAINT-VENANTSche Prinzip nicht gilt.

<sup>2</sup> Nach Adhemar Barré de SAINT-VENANT, französischer Mathematiker, \*1797 in Villiers-en-Biere, †1886 in Saint-Ouen bei Vendôme.

Falls in einem Dehnstab die Querschnittsfläche  $A$  nicht konstant ist, sondern von der Längskoordinate  $x$  abhängt, und möglicherweise auch die Normalkraft  $N(x)$  variabel ist, so gilt das gleiche für die Normalspannung  $\sigma(x) = N(x)/A(x)$ . Die Annahme der gleichmäßigen Spannungsverteilung über den Querschnitt ist auch in diesem Fall dort gerechtfertigt, wo sich  $N(x)$  und  $A(x)$  nur „langsam“ verändern.



1.6: Verschiebungen am Zugstab

Neben der Spannung müssen wir auch noch den Begriff der *Dehnung* einführen. Wir betrachten dazu den Zugstab der Abb. 1.6, dessen Querschnitt nicht notwendigerweise konstant ist, sich jedoch nur „langsam“ mit  $x$  verändern soll. Die  $x$ -Koordinate zählen wir von der Einspannstelle aus längs der Stabachse. Unter der Wirkung von  $F$  verlängert sich der Stab, und mit  $u(x)$  bezeichnen wir die Verschiebung des Querschnitts, der sich im unbelasteten Zustand an der Stelle  $x$  befand. Der Einspannquerschnitt wird offensichtlich überhaupt nicht verschoben, d.h. es ist  $u(0) = 0$ , während der Endquerschnitt die größte Verschiebung  $u(l)$  erfährt.

Wir betrachten nun zwei Querschnitte des Stabes, die im unbelasteten Zustand jeweils an den Stellen  $x$  und  $x + \Delta x$  liegen. Bei Belastung durch die Kraft  $F$  erfahren diese Querschnitte die Verschiebungen  $u(x)$  bzw.  $u(x + \Delta x)$ . Während der Abstand zwischen diesen beiden Querschnitten im unverformten Zustand gleich  $\Delta x$  ist, liegen im belasteten Zustand die Querschnitte um  $\Delta x + u(x + \Delta x) - u(x)$  auseinander, sodass die Längenänderung des Elementes gerade  $u(x + \Delta x) - u(x)$  ist. Als Dehnung bezeichnet man diese auf die ursprüngliche Länge bezogene Längenänderung in dem Grenzfall  $\Delta x \rightarrow 0$ , d.h.

$$\varepsilon(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (1.9)$$

( $\varepsilon =$  „epsilon“). Die Dehnung ist also eine dimensionslose Größe, die bei den idealisierten, starren Körpern stets gleich Null ist. Wirkliche Körper sind immer mehr oder minder dehnbar. Bei Stahl liegen die maximal zulässigen Dehnungen in der Größenordnung von  $10^{-3}$ , d.h. ein Stahlstab konstanten Querschnitts von einem Meter Länge kann sich unter Wirkung von Normalkräften maximal etwa um einige Millimeter verlängern oder verkürzen, bevor er zu Bruch geht.

In einem Dehnstab *konstanten Querschnitts* unter konstanter Normalkraft ist nicht nur die Spannung konstant über den Querschnitt und längs der Stabachse, sondern auch die Dehnung in Längsrichtung ist unabhängig vom Ort. Es ist in diesem Fall nicht notwendig, den in (1.9) angegebenen Grenzübergang durchzuführen, sondern man kann hier mit der Verlängerung  $\Delta l$  des Stabes die Dehnung auch als

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1.10)$$

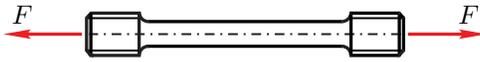
schreiben.

Die Verlängerung des Dehnstabes der Abb. 1.6 hängt natürlich von der Größe der Belastung  $F$  ab. Führt man Zugversuche mit Proben aus Stahl, dem im Maschinenbau am häufigsten verwendeten Material, durch (Abb. 1.7a), so ergeben sich *Spannungs-Dehnungs-Diagramme* gemäß Abb. 1.7b, in denen die Spannung  $\sigma = F/A$  als Funktion der Dehnung  $\varepsilon = \Delta l/l$  aufgetragen ist. Anstelle von  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  kann man natürlich auch  $F$ ,  $\Delta l$  an die Achsen schreiben und die Skalierung entsprechend ändern. Die Diagramme gelten für den Fall *quasi-statischer* Belastung, d.h. die Kraft oder der Weg werden von Null an so langsam erhöht, dass eine Folge von Gleichgewichtszuständen durchfahren wird. Bei plötzlichem Aufbringen einer Verschiebung  $\Delta l$  oder einer Längskraft  $F$  dagegen stellen sich Schwingungen ein; Spannungen und Dehnungen sind dann Funktionen der Zeit und des Ortes. Zugversuche können sowohl kraft- also auch weggesteuert durchgeführt werden, wobei jeweils die eine Größe vorgegeben und die andere, sich einstellende, Größe gemessen wird.

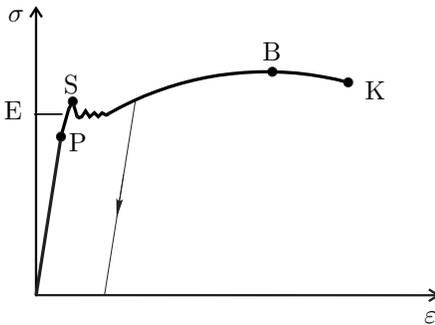
Für kleine Belastungen sind die Spannungen proportional zur Dehnung, die Grenze dieses Bereichs ist in Abb. 1.7b durch den Punkt P (*Proportionalitätsgrenze*) gekennzeichnet. Der Punkt E kennzeichnet die Grenze des elastischen Verhaltens, d.h. das Spannungsniveau, ab dem die durch Kräfte hervorgerufenen Verformungen nach Entfernen der Belastung nicht mehr vollständig zurückgehen. Übersteigen die Spannungen die *Elastizitätsgrenze*, so treten bleibende (*plastische*) Verformungen auf. Der Punkt S kennzeichnet die *Streckgrenze* (= *Fließgrenze*); hier kommt es zu einem sehr großen Anwachsen der Dehnung, ohne dass die Spannung nennenswert zunimmt, man sagt auch: „Das Material fließt“. Der Punkt B, an dem die größte überhaupt mögliche Spannung auftritt, wird als *Bruchgrenze* (= *Zugfestigkeit*) bezeichnet. Im Anschluss daran nimmt dann die Spannung wieder ab, und das Material geht am Punkt K endgültig zu Bruch. Die auf die Probe wirkende Kraft  $F$  leistet bei der Verlängerung um  $\Delta l$  die Arbeit

$$W(\Delta l) = \int_0^{\Delta l} F \overline{\Delta l} \, d\overline{\Delta l}. \quad (1.11)$$

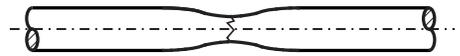
Unter der Brucharbeit versteht man die gesamte bis zum Bruch aufgewandte Arbeit der Kraft  $F$ . Die auf das Volumen der Probe bezogene Brucharbeit ist gleich der von der Spannungs-Dehnungs-Linie und der Abszissenachse eingeschlossenen Fläche. Werkstoffe mit einer hohen bezogenen Brucharbeit werden als *zäh* bezeichnet; solche mit einer niedrigen als *spröde*.



1.7a: Probe für Zugversuch



1.7b: Spannungs-Dehnungs-Diagramm



1.7c: Einschnürung an der Bruchstelle

Die in Abb. 1.7b aufgetragene Spannung  $\sigma = F/A$  ist auf die Querschnittsfläche  $A$  des unbelasteten Stabes bezogen. Beim Zugversuch ändert sich der Querschnitt zunächst nur geringfügig mit  $F$ . Bei vielen metallischen Werkstoffen kommt es kurz vor dem Bruch zu einer „Einschnürung“ (Abb. 1.7c). Bezieht man  $F$  auf die Querschnittsfläche an der Einschnürstelle, so nimmt die Spannung nicht ab, wie in Abb. 1.7b, sondern ständig zu.

Bei Entlastung (= Zurücknahme der Belastung) von einem Spannungsniveau oberhalb der Fließgrenze bewegt sich der Zustand der Probe längs der dünnen Linie, und es stellt sich eine bleibende Verformung ein (Abb. 1.7b). Die Steigung dieser Linie ist die gleiche wie bei der Belastung für  $\sigma < \sigma_P$ . Bei den üblichen technischen Anwendungen dimensioniert man Bauteile so, dass die Spannungen weit unterhalb der Bruchgrenze liegen. Meist beschränkt man sich sogar auf den linear-elastischen Bereich und vermeidet so bleibende, d. h. plastische Verformungen.

Die Spannungs-Dehnungs-Diagramme verschiedener Stahlsorten unterscheiden sich nicht in der anfänglichen Steigung, jedoch in der Höhe der Werte  $\sigma_P$  sowie in dem Bereich  $\sigma > \sigma_P$ . Je nach Art des Stahles und der Wärmebehandlung können Fließbereich und Bruchgrenze sehr unterschiedlich sein.

Für andere Metalle und Legierungen gibt es einen Proportionalitätsbereich wie in Abb. 1.7b, der Fließbereich fehlt jedoch oft vollständig (z.B. bei Grauguss). Auch für nichtmetallische Werkstoffe sind Spannungen und Dehnungen näherungsweise proportional, solange die Spannungen nicht zu groß werden. Einige typische Werte der Zugfestigkeit  $\sigma_B$  und der Streckgrenze  $\sigma_S$  sind in der Tabelle 1.1 angegeben. Die ebenfalls dort aufgeführten Größen  $E$ ,  $\nu$  ( $\nu = \text{„ny“}$ ) und  $\alpha$  ( $\alpha = \text{„alpha“}$ ) werden in Kapitel 2 erklärt.

**Tabelle 1.1:** Einige Materialkennwerte (bei 20 °C)

Werkstoff	$\frac{\sigma_B}{\text{mm}^2}$ $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\frac{\sigma_S}{\text{mm}^2}$ $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$E$ $10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	$\nu$ –	$\alpha$ $\frac{1}{^\circ\text{C} 10^5}$
Baustahl S235* (alt: St37)	≈360-510	≈230	211	≈0,3	≈1,2
Baustahl E360* (alt: St70-2)	≈690-900	≈365	211	≈0,3	≈1,2
Edelstahl 50CrV4	≈1080-1270		216	≈0,3	≈1,2
Gusseisen GGG40	>390		170-185	0,28-0,29	≈0,9
Titanlegierungen	≈300-1300		112-130	0,32-0,38	≈2,1-3,1
Aluminiumleg.	≈100-500		60-80	≈0,33	≈2,3
Holz, Nußbaum in Faserrichtung	≈100 (Zug) ≈40-70 (Druck)				
quer zur Faserrichtung	≈4 (Zug) ≈10 (Druck)				

\* nach DIN EN 10 025

