Technische Mechanik

Band 3: Dynamik

EUROPA LEHRMITTEL

Edition Harri Deutsch

Technische Mechanik

Band 3: Dynamik

von

Peter Hagedorn
Jörg Wallaschek

5., vollständig überarbeitete Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56924

Autoren:

Prof. Dr. Peter Hagedorn vertritt an der Technischen Universität Darmstadt das Fach Technische Mechanik in Lehre und Forschung. Er hat jahrzehntelang Vorlesungen über Technische Mechanik und über Technische Schwingungslehre für Hörer unterschiedlicher Fachrichtungen gehalten.

Professor Dr.-Ing. Jörg Wallaschek ist Direktor des Institutes für Dynamik und Schwingungen an der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover und vertritt die Fächer Technische Mechanik und Maschinendynamik in der Fakultät für Maschinenbau.

5., vollständig überarbeitete Auflage 2017

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5693-1

ISBN 978-3-8085-5803-4 (E-Book)

http://www.europa-lehrmittel.de
Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Druck: UAB BALTO print, Vilnius LT-08217, Litauen

Vorwort zur fünften Auflage

Die drei Bände zur Technischen Mechanik von Peter Hagedorn haben inzwischen große Verbreitung als Lehrbücher an Universitäten und Hochschulen gefunden. Mit der vorliegenden 5. Auflage ist Jörg Wallaschek als Ko-Autor dazu gekommen.

Ein wesentlicher Teil der Überarbeitung der neuen Auflage durch den Erstautor erfolgte während Gastaufenthalten am Department of Mechanical Engineering der University of Canterbury, Christchurch, Neuseeland. Der Erstautor dankt dem Department für die freundliche Aufnahme und dafür, dass das Department die Infrastruktur zur Verfügung gestellt hat.

Das bewährte Konzept zur Einführung der Grundbegriffe und mathematischen Hilfsmittel wurde beibehalten. Text, Abbildungen und Aufgaben wurden behutsam überarbeitet und an einigen Stellen ergänzt, um das Buch noch besser auf die Anforderungen der Ingenieur-Ausbildung abzustimmen. Die Abbildungen wurden farbig gestaltet, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen.

Bei der Erstellung der Zeichnungen und des druckfertigen Manuskripts wurden wir von Herrn Dipl. Ing. Hendrik Ohrdes und Herrn M. Sc. Henrik Westermann sowie Frau Parsamanesh und Frau Wiechens tatkräftig unterstützt, wofür wir herzlich Dank sagen.

Wir danken dem Verlag Europa-Lehrmittel Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG für die sehr gute Betreuung unseres Buchprojektes und insbesondere unserem Lektor, Herrn Klaus Horn für die vertrauensvolle Zusammenarbeit.

Darmstadt / Hannover, im Herbst 2016

Peter Hagedorn
hagedorn@dyn.tu-darmstadt.de

Jörg Wallaschek
mechanik@wallaschek.eu

Vorwort zur vierten Auflage

Dieser Band entspricht dem dritten Teil einer dreisemestrigen Vorlesung, die ich seit mehr als 30 Jahren für Hörer verschiedener Fachrichtungen an der Technischen Universität Darmstadt halte; zwei weitere Bände behandeln die *Statik* und die *Festigkeitslehre*. Niveau und Aufbau der drei Bücher orientieren sich an den Lehrveranstaltungen, wie sie besonders für Ingenieur–Studenten an praktisch allen Hochschulen angeboten werden.

Die unterschiedliche Vorbildung, die unsere Studenten von der Schule mitbringen, hat zur Folge, dass in den Vorlesungen für die Erstsemester Grundbegriffe und mathematische Hilfsmittel sehr elementar eingeführt werden müssen. Ich war in dem vorliegenden Buch bemüht, das Gebäude der Mechanik auf dem soliden Fundament dieser Grundlagen systematisch aufzubauen. Die freundliche Aufnahme des Buches, die sehr schnell Neuauflagen notwendig machte, zeigt mir, dass dies zumindest teilweise gelungen ist.

Dank des Einsatzes der Herren Dr.–Ing. Daniel Hochlenert und Dipl.–Ing. Florian Fischer war es möglich, die gesamte Reihe von Grund auf zu überarbeiten, so dass die drei Bände jetzt in einem neuen Layout vorliegen. Dabei wurden in allen drei Bänden zahlreiche Verbesserungen, neue Beispiele und – bei der numerischen Behandlung von Aufgaben mittels MATLAB, insbesondere in den Bänden 1 und 3 – eine Reihe von Ergänzungen vorgenommen. Viele dieser Änderungen gehen direkt auf Anregungen der Herren Hochlenert und Fischer zurück, die auch die Erstellung der reproduktionsfähigen Vorlagen überwacht haben. Ich danke beiden für den unermüdlichen Einsatz.

Mit der vorliegenden Auflage des Bandes 3 wurde Kapitel 5 (Dynamik der Systeme) vollkommen überarbeitet. Dies betrifft sowohl die Darstellung als auch teilweise die Notation. Weiterhin wurden in Kapitel 3 neue Beispiele zu Stößen starrer Körper mit und ohne Reibung eingefügt, die klar die Schwierigkeiten der Behandlung von Stößen in der Starrkörpermechanik belegen. Diese Änderungen wurden im wesentlichen durch Dr. Hochlenert angeregt, der sie dann auch eingearbeitet hat.

Manche Kollegen und viele Studenten haben mich in der Vergangenheit auf mögliche Verbesserungen hingewiesen, die hier eingearbeitet wurden. Ihnen allen sei an dieser Stelle gedankt.

Dem Verlag Harri Deutsch danke ich für die bewährt gute Zusammenarbeit.

Peter Hagedorn

Inhaltsverzeichnis

Die mit * gekennzeichneten Abschnitte können bei einer ersten Lektüre weggelassen werden.

1 Einleitung

In diesem Buch befassen wir uns mit der Bewegung von Massenpunkten und starren Körpern unter dem Einfluss von Kräften, d. h. wir behandeln die Kinetik einfacher mechanischer Systeme. Im internationalen Sprachgebrauch hat sich hierfür allerdings statt des korrekten Ausdrucks „Kinetik“ die Bezeichnung *Dynamik* (englisch: *dynamics*) durchgesetzt. Eigentlich bedeutet Dynamik ja „Lehre von den Kräften“, während hier die *Bewegung* unter der Wirkung von Kräften im Mittelpunkt unserer Betrachtungen steht. Wir schließen uns dem modernen Sprachgebrauch an und verwenden die Bezeichnung „Dynamik“ anstelle von „Kinetik“.

Als Lehre von den Bewegungen und den Kräften verwendet die Dynamik Begriffe der *Statik*, d. h. der Geometrie der Kräfte, und der *Kinematik*, also der Geometrie der Bewegung. Mit der Statik haben wir uns schon in TM 1 (= Technische Mechanik, Bd. 1) beschäftigt. Die Kinematik wurde bisher noch nicht behandelt. Wir müssen uns daher zunächst der Beschreibung der Bewegungen, d. h. also der Kinematik, widmen, bevor wir dann in der Dynamik den Zusammenhang zwischen den Kräften und den Bewegungen genauer untersuchen. Zu den Grundbegriffen aus der Statik (TM 1) und der Festigkeitslehre (TM 2) tritt dabei als zusätzlicher, neuer Begriff die *Zeit* auf. Damit sind Raum, Zeit, Masse und Kraft die wichtigsten Grundbegriffe der Dynamik.

In der klassischen NEWTONschen Mechanik[1], die für eine hinreichend genaue Behandlung der meisten mechanischen Probleme der Technik ausreicht, geht man von der Existenz einer absoluten Zeit sowie eines absolut ruhenden Bezugssystems, eines so genannten *Inertialsystems*, aus. Lediglich bei wenigen, speziellen Problemen der Technik muss man über den Rahmen dieser klassischen Mechanik hinausgehen, um auf zufrieden stellende Lösungen zu kommen.

Wir fassen die Grundlagen der klassischen Mechanik in den NEWTONschen Gesetzen zusammen, die in etwas anderer Form auch schon in TM 1 angegeben wurden. Sie sind zwar nicht in dieser Formulierung bei NEWTON zu finden, es ist jedoch heute allgemein üblich, sie mit seinem Namen zu verbinden. Das erste Gesetz, auch **Trägheitsgesetz** genannt, besagt:

> *Es existiert ein Bezugssystem (Inertialsystem), bezüglich dessen jeder Massenpunkt in Ruhe oder in gleichförmiger geradliniger Bewegung bleibt, wenn keine Kräfte auf ihn wirken.*

[1] Nach dem Physiker und Astronom Sir Isaac NEWTON, *1643 in Woolsthorpe, †1727 in Kensington (heute London).

Das zweite Gesetz (= Bewegungsgesetz, **Grundgesetz der Dynamik**) lautet:

> *In diesem Inertialsystem gilt für einen Massenpunkt der Zusammenhang*
>
> $$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}, \tag{1.1}$$
>
> *d. h. der Kraftvektor ist proportional zum Beschleunigungsvektor; die Proportionalitätskonstante ist die Masse (träge Masse).*

Das dritte Gesetz (= Gegenwirkungsgesetz, **Gesetz von actio & reactio**) besagt:

> *Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper 1 eine Kraft auf einen Körper 2 aus, so ist diese gleich groß und entgegengerichtet zu der Kraft, die der Körper 2 auf den Körper 1 ausübt.*

Dieses dritte NEWTONsche Gesetz wird auch oft prägnant durch die Gleichung

$$\text{actio} = \text{reactio} \tag{1.2}$$

formuliert. Wir nehmen im Folgenden an, dass die drei Gesetze für Massenpunkte gelten und werden daraus dann Aussagen für andere Körper herleiten. Als von den NEWTONschen Gesetzen unabhängiges Axiom führen wir in Kapitel 3 und 4 noch den *Drehimpulssatz* oder *Drallsatz* ein, den man nur für Spezialfälle aus diesen „Gesetzen“ ableiten kann.

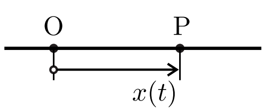
2 Kinematik

2.1 Kinematik des Punktes

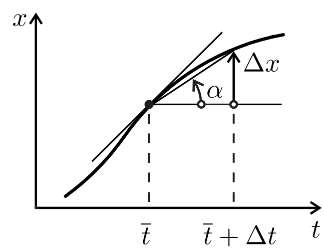
2.1.1 Die geradlinige Bewegung

In der Kinematik beschreiben wir die Lage von Körpern in Abhängigkeit von der Zeit. Zunächst behandeln wir die Kinematik eines *Punktes* und führen die Grundbegriffe *Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* anhand der geradlinigen Bewegung ein.

Gemäß Abb. 2.1 betrachten wir einen sich auf einer gegebenen Geraden bewegenden Punkt P. Seine Lage wird auf der Geraden durch die einzige Koordinate x beschrieben. Als *Bewegung* bezeichnen wir die Funktion $x(t)$, also die Abhängigkeit der Variablen x von der Zeit t. Grafisch kann sie z. B. wie in Abb. 2.2 dargestellt werden.



2.1: Zur geradlinigen Bewegung eines Punktes



2.2: Zum Begriff der mittleren Geschwindigkeit

Die *mittlere Geschwindigkeit* in dem Zeitintervall von $\bar{t}$ bis $\bar{t} + \Delta t$ ist durch den Quotienten

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{x(\bar{t} + \Delta t) - x(\bar{t})}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.1}$$

definiert (Δ = „Delta“). Gemäß Abb. 2.2 ist die mittlere Geschwindigkeit in dem gegebenen Zeitintervall proportional zur Steigung der Sekante an die gegebene Kurve $x(t)$:

$$v_{\mathrm{m}} \sim \tan\alpha \tag{2.2}$$

(α = „alpha“). Als *momentane Geschwindigkeit* oder auch einfach *Geschwindigkeit* zum Zeitpunkt $t = \bar{t}$ bezeichnen wir den Grenzwert

$$v(\bar{t}) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}(\bar{t}) \tag{2.3}$$

der mittleren Geschwindigkeit für $\Delta t \to 0$. Wie man sieht, ist dies die Ableitung von $x(t)$ nach t. Die Geschwindigkeit $v(\bar{t})$ ist demnach proportional zur Steigung der Tangente an der Stelle $t = \bar{t}$ in Abb. 2.2.

Die *mittlere Beschleunigung* in dem Zeitintervall $(\bar{t},\, \bar{t} + \Delta t)$ ist als

$$a_\mathrm{m} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.4}$$

definiert und die (*momentane*) *Beschleunigung* zum Zeitpunkt $\bar{t}$ als

$$a(\,\bar{t}\,) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \ddot{x}(\,\bar{t}\,)\,. \tag{2.5}$$

Kennt man die Bewegung $x(t)$, so kann man Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ und Beschleunigung $\ddot{x}(t)$ durch Differenziation bestimmen. Die Formelzeichen v und a für Geschwindigkeit und Beschleunigung sind international gebräuchlich, sie entsprechen den englischen Bezeichnungen „velocity“ bzw. „acceleration“, die ihrerseits aus dem Lateinischen kommen. Definitionsgemäß werden Geschwindigkeit und Beschleunigung im SI-System in m/s bzw. $\mathrm{m/s^2}$ gemessen.

2.1.2 Erste Bemerkungen zu Differenzialgleichungen

Im NEWTONschen Grundgesetz (1.1) sind die Kräfte in der Regel nicht konstant; nur in wenigen Fällen sind sie vorgegebene Funktionen der Zeit. Meist hängen die Kräfte vom Ort und auch von der Geschwindigkeit ab. Die Luftwiderstandskraft ist ein typisches Beispiel einer geschwindigkeitsabhängigen Kraft. Nehmen wir an, dass die Kraft als Funktion des Ortes, der Geschwindigkeit und der Zeit gegeben ist, so nimmt das NEWTONsche Grundgesetz (1.1) für die geradlinige Bewegung die Form

$$m\,\ddot{x}(t) = F(x(t),\, \dot{x}(t),\, t) \tag{2.6}$$

an, wobei die Funktion $F(x,\, \dot{x},\, t\,)$ bekannt und gleich der Summe aller auf den Massenpunkt in x-Richtung wirkenden Kräfte ist.

Das Grundgesetz der Dynamik führt also auf eine Gleichung der Art

$$\ddot{x}(t) = a(x(t),\, \dot{x}(t),\, t)\,, \tag{2.7}$$

wobei die rechte Seite eine Funktion von x, $\dot{x}$ und t ist. Wir nehmen jetzt an, dass die Funktion $a(x,\, \dot{x},\, t\,)$ bekannt und die Bewegung $x(t)$ zu bestimmen ist. Gleichungen der Art (2.7), die einen Zusammenhang zwischen den Ableitungen einer (unbekannten) Zeitfunktion, der Funktion selbst und der Zeit herstellen, bezeichnet man als *Differenzialgleichungen*. Eine Lösung der Differenzialgleichung (2.7) ist eine Funktion $x(t)$, die – in (2.7) eingesetzt – diese für alle Zeiten erfüllt.

In der Mechanik, aber auch in vielen anderen Bereichen der Physik und der Technik, spielen Differenzialgleichungen eine zentrale Rolle, und entsprechend viel Aufmerksamkeit wird ihnen in den Mathematik-Vorlesungen gewidmet. Da dies aber oft erst zu einem späteren Zeitpunkt geschieht, werden wir (2.7) an dieser Stelle etwas näher beleuchten. Zunächst stellen wir fest, dass die Differenzialgleichung (2.7) von *zweiter Ordnung* ist (Die Ordnung einer Differenzialgleichung ist die Ordnung der höchsten in ihr auftretenden Ableitung). Der Grund dafür ist, dass im Grundgesetz der Dynamik zwar Beschleunigungen, aber keine höheren Zeitableitungen von $x(t)$ auftreten.

Beschleunigung als Funktion der Zeit

Im Folgenden besprechen wir die wichtigsten Spezialfälle von (2.7). Zunächst betrachten wir den Fall, in dem die *Beschleunigung lediglich eine Funktion der Zeit* ist. Dann reduziert sich (2.7) zu

$$\boxed{\ddot{x}(t) = a(t)\,,} \tag{2.8}$$

wobei die rechte Seite eine gegebene Funktion der Zeit t ist. Die Integration dieser Gleichung bezüglich t liefert

$$v(t) = \dot{x}(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t + C_1\,. \tag{2.9}$$

Die Geschwindigkeit kann also durch Integration aus der Beschleunigung ohne weiteres bestimmt werden, wenn $a(t)$ vorgegeben ist. Die Integrationskonstante C_1 ist dabei noch festzulegen. Sie ergibt sich z. B. aus einer Anfangsbedingung für die Geschwindigkeit. Anstelle des unbestimmten Integrals kann man auch das bestimmte Integral

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a(\bar{t})\,\mathrm{d}\bar{t} \tag{2.10}$$

schreiben, bzw.

$$\boxed{v(t) = \int_0^t a(\bar{t})\,\mathrm{d}\bar{t} + v(0)\,,} \tag{2.11}$$

wobei

$$v(0) = \dot{x}(0) = v_0 \tag{2.12}$$

jetzt die Bedeutung der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$, d. h. der *Anfangsgeschwindigkeit* hat. Ganz analog liefert eine zweite Integration nunmehr

$$\boxed{x(t) = \int_0^t v(\bar{t})\,\mathrm{d}\bar{t} + x_0} \tag{2.13}$$

mit x_0 als *Anfangslage*.

Als erstes Beispiel zu (2.8) betrachten wir den Sonderfall der **Bewegung mit konstanter Beschleunigung**

$$a(t) \equiv a_0 = \text{const}\,. \tag{2.14}$$

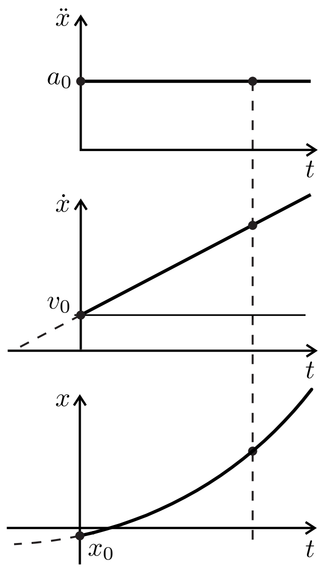
Dies führt mit (2.11) auf

$$v(t) = a_0\,t + v_0 \tag{2.15}$$

und daraus folgt mit (2.13)

$$x(t) = a_0\,\frac{t^2}{2} + v_0\,t + x_0\,, \tag{2.16}$$

d. h. die Koordinate $x(t)$ ist eine quadratische Funktion der Zeit, während die Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t)$ linear in t ist (s. Abb. 2.3).



2.3: Zur Bewegung (2.16)

Als zweites Beispiel behandeln wir die **Bewegung mit harmonischer Beschleunigung**

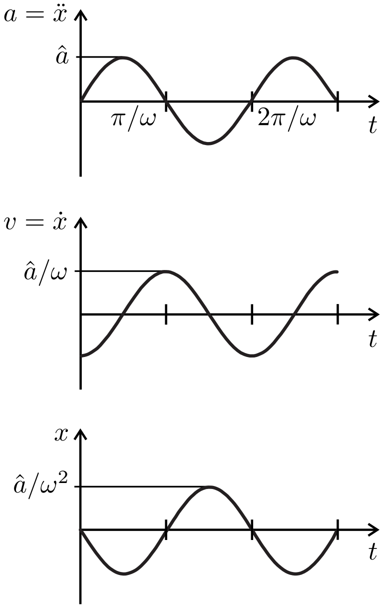
$$a(t) = \hat{a}\,\sin\omega t\,, \tag{2.17}$$

wobei ω ($\omega =$ „omega“) und $\hat{a}$ gegebene Konstanten sind. Hier ergibt die Integration der Beschleunigung

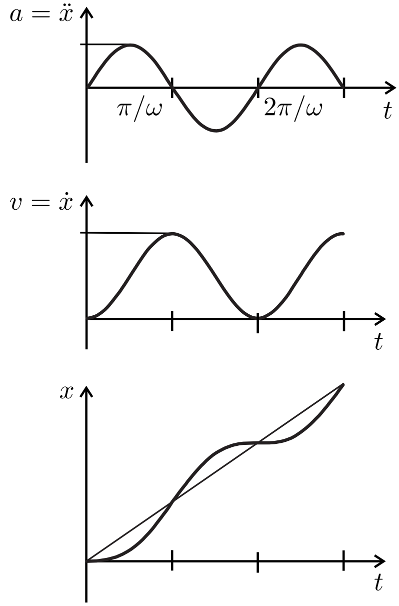
$$v(t) = \hat{a}\int_0^t \sin\omega\bar{t}\,\mathrm{d}\bar{t} + v_0 = -\,\hat{a}\,\frac{1}{\omega}\,\cos\omega\bar{t}\,\Big|_0^t + v_0\,, \tag{2.18}$$

so dass

$$v(t) = -\,\frac{\hat{a}}{\omega}\,(\cos\omega t - 1) + v_0 \tag{2.19}$$



2.4a: Zur Bewegung (2.20) für $v_0 = -\hat{a}/\omega$, $x_0 = 0$



2.4b: Zur Bewegung (2.20) für $v_0 = 0$, $x_0 = 0$

ist. Eine weitere Integration liefert schließlich

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{\hat{a}}{\omega}\int_0^t (\cos\omega\bar{t} - 1)\,\mathrm{d}\bar{t} + v_0\,t + x_0 \\ &= -\frac{\hat{a}}{\omega^2}\sin\omega t + \left(v_0 + \frac{\hat{a}}{\omega}\right) t + x_0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Das Ergebnis hängt von den Anfangsbedingungen ab. Der Verlauf der Beschleunigung $a(t)$, der Geschwindigkeit $v(t)$ und der Bewegung $x(t)$ ist für $x_0 = 0$, $v_0 = -\hat{a}/\omega$ in Abb. 2.4a dargestellt. Man bezeichnet eine solche durch trigonometrische Zeitfunktionen beschriebene Bewegung als *harmonische Schwingung*. Offensichtlich gehören zu einer harmonischen Schwingung $x(t)$ eine Geschwindigkeit und eine Beschleunigung, die ebenfalls harmonisch sind. Wählt man als Anfangsbedingungen $x_0 = 0$, $v_0 = 0$ so ergibt sich der in Abb. 2.4b dargestellte Verlauf von Beschleunigung, Geschwindigkeit und Auslenkung. Diese Bewegung ist keine harmonische Schwingung.

Beschleunigung als Funktion der Geschwindigkeit

Als zweiten Sonderfall von (2.7) betrachten wir

$$\ddot{x}(t) = a\big(\dot{x}(t)\big)\,; \tag{2.21}$$

hier ist die Kraft bzw. die *Beschleunigung als Funktion der Geschwindigkeit vorgegeben*, wie es z. B. beim Luftwiderstand der Fall ist. Mit

$$v = \dot{x} \tag{2.22}$$

schreibt sich (2.21) als

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a(v) \tag{2.23}$$

und dies kann auch als

$$\frac{\mathrm{d}v}{a(v)} = \mathrm{d}t \tag{2.24}$$

geschrieben werden („Trennung der Veränderlichen“). Auf der linken Seite steht in (2.24) jetzt ein Ausdruck, der lediglich von v abhängt, während die rechte Seite nur t enthält. Beide Seiten können daher gemäß

$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}\overline{v}}{a(\overline{v})} = \int_0^t \mathrm{d}\overline{t} \tag{2.25}$$

integriert werden. Bezeichnet man die Stammfunktion (d. h. das Integral) von $1/a(\overline{v})$ mit $G(\overline{v})$, so folgt

$$G(v) - G(v_0) = t\,. \tag{2.26}$$

Damit ist t als Funktion von v bekannt. Gelingt es, (2.26) nach v aufzulösen, so ergibt sich daraus

$$v(t) = f(v_0,\, t)\,. \tag{2.27}$$

Eine weitere Integration liefert dann

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(v_0, \overline{t})\,\mathrm{d}\overline{t}\,. \tag{2.28}$$

Im Gegensatz zu dem ersten Sonderfall (2.8) der Differenzialgleichung (2.7) war es hier nicht möglich, beide Seiten von (2.21) ohne weiteres zu integrieren, da in (2.21) die rechte Seite nicht als Funktion von t vorliegt. Es war daher notwendig, zunächst die Trennung der Veränderlichen durchzuführen.

Als Beispiel zu (2.21) behandeln wir die Differenzialgleichung

$$\ddot{x}(t) = g - k\,\dot{x}^2(t)\,, \tag{2.29}$$

wobei g und k konstant sind. Diese Differenzialgleichung beschreibt einen **Körper im freien Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes**, der in guter

Näherung quadratisch in der Geschwindigkeit ist. Trennung der Veränderlichen in (2.29) liefert zunächst mit $\dot{x} = v$

$$\frac{\mathrm{d}v}{g - k\,v^2} = \mathrm{d}t\,, \tag{2.30}$$

und die Integration mit $v_0 = 0$ ergibt

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{g - k\,\bar{v}^2} = \int_0^t \mathrm{d}\bar{t}\,, \tag{2.31}$$

woraus

$$\frac{1}{\sqrt{gk}}\,\operatorname{artanh}\left(v\sqrt{\frac{k}{g}}\right) = t \tag{2.32}$$

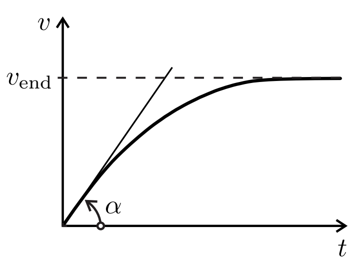
folgt. Auflösung nach v liefert

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\tanh\left(t\sqrt{g\,k}\right)\,, \tag{2.33}$$

und der Verlauf dieser Funktion ist in Abb. 2.5 wiedergegeben. Man erkennt an (2.29) (durch Nullsetzen von $\ddot{x}$) und auch an (2.32), dass für große Zeiten die Geschwindigkeit gegen den endlichen Grenzwert

$$v_{\mathrm{end}} := \lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \tag{2.34}$$

strebt. Die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 0$ entspricht der Steigung im Koordinatenursprung in Abb. 2.5, und es gilt $\tan\alpha \sim g$. Eine weitere Integration von (2.33) ergibt $x(t)$.



2.5: Verlauf der Geschwindigkeit gemäß (2.33)

Beschleunigung als Funktion der Lage

Als dritten Sonderfall von (2.7) untersuchen wir noch die Differenzialgleichung

$$\ddot{x}(t) = a\big(x(t)\big)\,, \tag{2.35}$$

die sich ergibt, wenn die *Beschleunigung als Funktion der Lage* gegeben ist. Dabei schreiben wir (2.35) zunächst als

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a(x) \tag{2.36}$$

bzw.

$$\mathrm{d}v = a(x)\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.37}$$

Multiplikation beider Seiten mit v ergibt

$$v\,\mathrm{d}v = a(x)\,v\,\mathrm{d}t\,, \tag{2.38}$$

wobei nun auf der rechten Seite das Produkt $v\mathrm{d}t$ durch $\mathrm{d}x$ ersetzt werden kann. Damit kann (2.38) gemäß

$$\int_{v_0}^{v} \overline{v}\,\mathrm{d}\overline{v} = \int_{x_0}^{x} a(\overline{x})\,\mathrm{d}\overline{x} \tag{2.39}$$

integriert werden. Mit $H(\overline{x})$ als der Stammfunktion von $a(\overline{x})$ folgt hieraus

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = H(x) - H(x_0)\,, \tag{2.40}$$

und Auflösung nach v bzw. $\dot{x}$ (sofern möglich) liefert

$$\dot{x} = h(x, x_0, v_0)\,. \tag{2.41}$$

Hier kann nun wieder die Trennung der Veränderlichen durchgeführt werden, und die Integration von

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\overline{x}}{h(\overline{x}, x_0, v_0)} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\overline{t} \tag{2.42}$$

ergibt schließlich $t(x)$, also die Zeit t als Funktion der Ortskoordinate x.

Als Beispiel betrachten wir die **Bewegung mit zum Weg proportionaler Beschleunigung**, die auf die Differenzialgleichung

$$\ddot{x}(t) = -\,\omega^2\,x(t) \tag{2.43}$$

mit der positiven Konstanten ω^2 führt. Das Minuszeichen in (2.43) zeigt an, dass die Beschleunigung dem Weg entgegengerichtet ist. Wir schreiben (2.43) als

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\,\omega^2\,x(t)\,, \tag{2.44}$$