

Vorkurs der Ingenieurmathematik



Edition
Harri 
Deutsch 

Vorkurs der Ingenieurmathematik

von

Jürgen Wendeler

4., erweiterte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 57327

Autor:

Prof. Dipl.-Ing. Jürgen Wendeler war Professor an der ehemaligen Fachhochschule der Telekom, Dieburg

4., erweiterte Auflage

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5791-4

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2016 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, 09618 Brand-Erbisdorf

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald

Druck: Media-Print Informationstechnologie GmbH, 33100 Paderborn

Vorwort

Dieses Buch dient der Vorbereitung auf ein Ingenieurstudium. Es entstand aus einer Reihe von Aufsätzen, die der Autor in den Unterrichtsblättern der Deutschen Telekom AG veröffentlicht hat und deren methodische Gestaltung Anerkennung fand. Bei der Zusammenfassung der Aufsätze zum vorliegenden Buch wurden dem gesteckten Ziel entsprechend wesentliche Ergänzungen und Erweiterungen vorgenommen.

Behandelt werden Rechenoperationen bis zum Logarithmieren, Funktionen einschließlich der trigonometrischen Funktionen und der algebraisch rationalen Funktionen, Gleichungen, Berechnungen am Dreieck, Vieleck und Kreis, Körperberechnungen und Grundlagen der Vektorrechnung.

Die vorliegende vierte Auflage wurde um zwei ausführliche Kapitel über die Grundlagen der Differenzial- und Integralrechnung erweitert, deren Beherrschung mittlerweile zur Vorbereitung auf ein Hochschulstudium gehört. Damit ist im wesentlichen das Gebiet der Elementarmathematik erfasst, und das Buch erhält für alle, die diesen Bereich der Mathematik wiederholen und festigen wollen, eine eigenständige Bedeutung.

Der Autor hat besonders auf Anschaulichkeit und Verständlichkeit des Lehrstoffs geachtet und am Anfang eine etwas breitere Darstellung gewählt, denn sichere Kenntnisse und Fertigkeiten in der Arithmetik sind eine unentbehrliche Grundlage für das weitere Studium.

Zahlreiche durchgerechnete Beispiele und Abbildungen unterstützen das methodische Anliegen des Buches. Die große Zahl von Aufgaben einschließlich Lösungen dient der Festigung des Lehrstoffs, seiner sicheren Anwendung sowie der notwendigen Selbstkontrolle für den Leser.

Das Buch ist zum Gebrauch neben Lehrveranstaltungen, aber auch in vollem Umfang zum Selbststudium geeignet. Der Autor dankt dem Verlag für die gute Zusammenarbeit.

Dieburg, im Sommer 2016

J. Wendeler

Leserkontakt

Autoren und Verlag Europa-Lehrmittel
Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Str. 23
42781 Haan-Gruiten
lektorat@europa-lehrmittel.de
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen

1	Bestimmte und allgemeine Zahlen	16
1.1	Geschichtliches, Zahldarstellung, Zahlensysteme	16
1.1.1	Geschichtliches	16
1.1.2	Zahldarstellung	16
1.1.3	Zahlensysteme	17
1.2	Bestimmte Zahlen, allgemeine Zahlen	18
1.2.1	Bestimmte Zahlen	18
1.2.2	Allgemeine Zahlen	19
1.3	Grundrechenarten für ganze Zahlen	20
1.3.1	Die Addition	20
1.3.2	Die Subtraktion	20
1.3.3	Die Multiplikation	21
1.3.4	Das Quadrat einer Zahl, der Potenzbegriff	21
1.3.5	Die Division	22
1.4	Brüche	23
1.4.1	Bruchrechnung	23
1.4.2	Dezimalbrüche	26
1.5	Proportionen	28
1.5.1	Definition und Eigenschaften	28
1.5.2	Direkte und indirekte Proportionalität	30
1.5.3	Prozentrechnung	32
1.6	Aufgaben	33
2	Klammern, Terme, Summen	36
2.1	Klammern	36
2.1.1	Einführung in die Klammerrechnung	36
2.1.2	Mehrere Klammern, Schachtelungen	37
2.2	Terme, Summen	37
2.2.1	Definition des Begriffes Term	37
2.2.2	Erklärung der Summe, Summanden	38
2.2.3	Addition und Subtraktion zweier Summen	39
2.2.4	Multiplikation einer Summe mit einer Zahl, Ausklammern eines Faktors	40
2.2.5	Multiplikation zweier Summen	40
2.2.6	Binomische Formeln	41
2.2.7	Division einer Summe durch eine Zahl, Kürzen	47

2.2.8	Division einer Summe durch eine Summe, Bruchterme, Zerlegen in Faktoren	48
2.3	Aufgaben	52
3	Mengen	56
3.1	Definition	56
3.2	Relationen und Operationen mit Mengen	57
3.3	Aussagen und Aussageformen	60
3.4	Aufgaben	61
 II Funktionen und Gleichungen		
4	Lineare Gleichungen, Determinanten	64
4.1	Gleichungen	64
4.1.1	Definition	64
4.1.2	Bedeutung der Gleichung	64
4.1.3	Geschichtliches	65
4.1.4	Einteilung der Gleichungen	65
4.1.4.1	Identische Gleichungen	65
4.1.4.2	Funktionsgleichungen	66
4.1.4.3	Bestimmungsgleichungen	66
4.2	Das Lösen von Bestimmungsgleichungen	67
4.2.1	Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten	68
4.2.2	Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten	70
4.2.3	Drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten	72
4.2.4	n lineare Gleichungen mit n Unbekannten	74
4.3	Gleichungssysteme und Determinanten	75
4.3.1	Zweireihige Determinanten, Cramer-Regel	75
4.3.2	Dreireihige Determinanten, Regel von Sarrus	79
4.3.3	Determinantengesetze	81
4.3.4	n -reihige Determinanten	85
4.4	Ungleichungen	85
4.4.1	Definitionen	85
4.4.2	Rechengesetze für Ungleichungen	86
4.4.3	Intervalle	87
4.4.4	Lineare Ungleichungen	88
4.4.4.1	Lineare Ungleichungen mit einer Variablen	88
4.4.4.2	Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen	88
4.4.4.3	Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen	90
4.5	Aufgaben	91
5	Funktionen	96
5.1	Definition und Darstellung von Funktionen	96
5.1.1	Der Funktionsbegriff	96
5.1.2	Darstellung von Funktionen	97
5.1.2.1	Die Funktionstafel	97
5.1.2.2	Die Funktionsgleichung	99
5.1.2.3	Die Funktionskurve	102

5.2	Die lineare Funktion	104
5.2.1	Definition und grafische Darstellung	104
5.2.2	Grafische Lösung einer linearen Gleichung	111
5.2.3	Grafische Lösung von linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten	113
5.2.4	Anwendungsbezogene Beispiele	116
5.3	Die Umkehrfunktion	121
5.4	Aufgaben	122
6	Potenzrechnung, die Potenzfunktion	124
6.1	Einführung	124
6.1.1	Begriff der Potenz, Definitionen	124
6.1.2	Geschichtliches	125
6.2	Potenzgesetze (Rechengesetze der Potenzen)	125
6.2.1	Addition/Subtraktion von Potenzen	125
6.2.2	Multiplikation von Potenzen	126
6.2.2.1	Potenzen mit gleichen Exponenten	126
6.2.2.2	Potenzen mit gleichen Basen	126
6.2.3	Division von Potenzen	126
6.2.3.1	Potenzen mit gleichen Exponenten	126
6.2.3.2	Potenzen mit gleichen Basen	126
6.2.4	Potenzieren einer Potenz	127
6.3	Anwendungen	128
6.4	Die Potenzfunktion	130
6.4.1	Definition	130
6.4.2	Graphen der Potenzfunktionen	131
6.4.2.1	Parabeln	131
6.4.2.2	Hyperbeln	139
6.4.3	Anwendungen	141
6.5	Aufgaben	143
7	Wurzelrechnung, Wurzelfunktionen	146
7.1	Einführung	146
7.1.1	Grundbegriffe und Definitionen	146
7.1.2	Quadratwurzel	148
7.1.3	Kubikwurzel	149
7.1.4	Rationale und irrationale Zahlen	150
7.1.5	Geschichtliches	151
7.2	Rechengesetze für Wurzeln	152
7.2.1	Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten	152
7.2.2	Addition und Subtraktion von Wurzeln	153
7.2.3	Multiplikation von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten	154
7.2.4	Division von Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten	155
7.2.5	Radizieren von Potenzen	156
7.2.6	Radizieren von Wurzeln	156
7.2.7	Wurzeln mit verschiedenen Exponenten	157
7.3	Rationalmachen des Nenners	158
7.4	Wurzelfunktionen	160
7.5	Aufgaben	164

8	Quadratische und Wurzelgleichungen	166
8.1	Definitionen	166
8.2	Lösungsverfahren	167
8.2.1	Sonderfälle	167
8.2.1.1	Rein quadratische Gleichungen	167
8.2.1.2	Quadratische Gleichungen mit fehlendem Absolutglied	169
8.2.2	Gemischt-quadratische Gleichungen	170
8.2.2.1	Quadratische Ergänzung, die p - q -Formel	170
8.2.2.2	Lösung in allgemeiner Form	174
8.2.2.3	Grafische Lösungen	175
8.3	Geschichtliches	177
8.4	Anwendungsbeispiele	177
8.5	Wurzelgleichungen	180
8.6	Aufgaben	182
9	Exponential- und Logarithmusfunktion	184
9.1	Exponentialfunktion	184
9.1.1	Grundbegriffe und Definition	184
9.1.2	Grafische Darstellung	185
9.1.3	e-Funktion	187
9.2	Logarithmische Funktion, Logarithmenrechnung	191
9.2.1	Logarithmische Funktion	191
9.2.2	Rechnen mit Logarithmen	194
9.2.3	Geschichtliches	198
9.2.4	Exponentialgleichungen	200
9.2.5	Funktionspapiere mit logarithmischem Maßstab	204
9.2.5.1	Einfach-logarithmisches Papier	204
9.2.5.2	Doppelt-logarithmisches Papier	207
9.3	Aufgaben	209
10	Trigonometrische Funktionen	211
10.1	Winkel	211
10.1.1	Definition	211
10.1.2	Grad- und Bogenmaß	212
10.1.3	Winkel an Geraden und Parallelen	216
10.2	Winkelfunktionen	218
10.2.1	Definition der Winkelfunktionen	218
10.2.2	Darstellung der Winkelfunktionen am Einheitskreis	223
10.2.3	Graphen und Eigenschaften der Winkelfunktionen	226
10.2.3.1	Die Graphen der Winkelfunktionen	226
10.2.3.2	Periodizität	227
10.2.3.3	Definitions- und Wertebereich	227
10.2.3.4	Symmetrieeigenschaften	228
10.3	Additionstheoreme	228
10.3.1	Herleitung	229
10.3.2	Funktionen des doppelten Winkels	231
10.3.3	Summe und Differenz der sin- und cos-Werte zweier Winkel	232
10.3.4	Quadrantenrelationen	232

10.4	Arkusfunktionen	233
10.4.1	Definition	233
10.4.2	Grafische Darstellung der Arkusfunktionen	235
10.4.3	Darstellung am Einheitskreis	235
10.4.4	Beziehungen zwischen den Arkusfunktionen	236
10.4.5	Bestimmung von Winkeln mit den Arkusfunktionen	236
10.5	Goniometrische Gleichungen	237
10.6	Sinusfunktion, harmonische Schwingungen	241
10.7	Aufgaben	246
11	Algebraische rationale Funktionen	248
11.1	Einteilung der Funktionen	248
11.2	Algebraische ganzrationale Funktionen	248
11.2.1	Grundbegriffe	248
11.2.2	Horner-Schema	256
11.3	Algebraische gebrochene rationale Funktionen	259
11.3.1	Definitionen	259
11.3.2	Besondere Eigenschaften der gebrochenen rationalen Funktion .	260
11.3.2.1	Nullstellen	260
11.3.2.2	Polstellen	261
11.3.2.3	Lücken	265
11.3.2.4	Asymptoten	266
11.3.3	Partialbruchzerlegung	273
11.4	Aufgaben	277
12	Grundlagen der Differenzialrechnung	279
12.1	Einführung, Definitionen	279
12.1.1	Aufgabe der Differenzialrechnung	279
12.1.2	Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten – der Differenzialquotient	281
12.1.3	Ableitung als Funktion	288
12.1.4	Höhere Ableitungen	289
12.1.5	Differenzial	290
12.2	Differenziationsregeln	292
12.2.1	Differenzieren einer konstanten Funktion	292
12.2.2	Faktorregel	292
12.2.3	Summenregel	293
12.2.4	Produktregel	293
12.2.5	Quotientenregel	295
12.2.6	Kettenregel	296
12.2.7	Differenzieren einer implizit gegebenen Funktion	299
12.2.8	Differenzieren mithilfe der Umkehrfunktion	302
12.2.9	Logarithmisches Differenzieren	303
12.3	Ableitungen einiger elementarer Funktionen	304
12.4	Einige Anwendungen der Differenzialrechnung	305
12.4.1	Kurvenuntersuchungen	305
12.4.1.1	Ganze Funktionen	305
12.4.1.2	Gebrochene rationale Funktionen	310

12.4.2	Optimierungsaufgaben	314
12.5	Aufgaben	320
13	Grundlagen der Integralrechnung	321
13.1	Anwendung der Integralrechnung	321
13.2	Unbestimmte Integrale	321
13.2.1	Stammfunktionen und Umkehrung der Differenziation	321
13.2.2	Grundintegrale	323
13.2.3	Geometrische Deutung der Stammfunktionen	324
13.2.4	Ausblick: Differenzialgleichungen	326
13.2.5	Integrationsregeln	327
13.2.6	Lineare Substitution	327
13.3	Bestimmte Integrale	330
13.3.1	Bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summe	330
13.3.2	Bestimmtes Integral und Stammfunktion	332
13.3.3	Rechenregeln für bestimmte Integrale	333
13.3.3.1	Umkehrung des Integrationsweges	333
13.3.3.2	Zerlegung des Integrationsweges	333
13.3.3.3	Linearität	333
13.3.4	Lineare Substitution	334
13.3.5	Eine Anwendung aus der Mechanik	336
13.3.6	Geometrische Anwendungen	340
13.3.6.1	Flächenberechnung	340
13.3.6.2	Berechnung von Bogenlängen	346
13.3.6.3	Berechnung von Rauminhalten und Mantelflächen von rotationssymmetrischen Körpern	349
13.3.7	Arbeitsintegrale	352
13.3.7.1	Mechanische Arbeit	352
13.3.7.2	Elektrische Arbeit	357
13.3.8	Mittelwerte	359
13.4	Aufgaben	364

III Geometrie und Vektorrechnung

14	Das Dreieck	366
14.1	Allgemeines	366
14.2	Die Kongruenz von Dreiecken	369
14.3	Die Ähnlichkeit von Dreiecken	371
14.4	Höhen, Mittelsenkrechte und Seitenhalbierende	373
14.5	Flächeninhalt des Dreiecks	375
14.6	Das rechtwinklige Dreieck	376
14.7	Das gleichschenklige Dreieck	380
14.8	Das gleichseitige Dreieck	381
14.9	Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks	381
14.9.1	Allgemeines	381
14.9.2	Der Sinussatz	382
14.9.3	Der Cosinussatz	384
14.9.4	Die Grundaufgaben der Dreiecksberechnung	387
14.10	Aufgaben	389

15 Das Viereck, Vielecke	392
15.1 Das allgemeine Viereck	392
15.2 Spezielle Vierecke	394
15.3 Das n -Eck	397
15.4 Aufgaben	400
16 Der Kreis	402
16.1 Definition, Umfang und Fläche	402
16.2 Geraden, Strecken und Winkel am Kreis	403
16.3 Kreissektor und Kreissegment	408
16.4 Ähnlichkeitssätze am Kreis	410
16.5 Zwei Kreise	411
16.6 Aufgaben	414
17 Körperberechnung	416
17.1 Allgemeines über Körper	416
17.2 Der Quader	417
17.3 Das Prisma	419
17.4 Die Pyramide	422
17.5 Der Zylinder	428
17.6 Der Kegel	430
17.7 Die Kugel	432
17.8 Aufgaben	436
18 Grundlagen der Vektorrechnung	439
18.1 Grundbegriffe, Definitionen	439
18.1.1 Vektor und Skalar	439
18.1.2 Definitionen	441
18.2 Rechengesetze	442
18.2.1 Addition	442
18.2.2 Subtraktion	443
18.2.3 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	444
18.3 Komponenten, Koordinaten, Richtungswinkel	445
18.4 Lineare Abhängigkeit von Vektoren	449
18.5 Skalares Produkt zweier Vektoren	455
18.5.1 Definitionen	455
18.5.2 Eigenschaften des skalaren Produktes	455
18.5.3 Komponentendarstellung des Skalarproduktes	458
18.6 Vektorprodukt zweier Vektoren	460
18.6.1 Definition	460
18.6.2 Eigenschaften des Vektorproduktes	461
18.6.3 Komponentendarstellung des Vektorproduktes	462
18.7 Spatprodukt	466
18.7.1 Definition	466
18.7.2 Geometrische Deutung des Spatproduktes	467
18.7.3 Rechengesetze	468
18.8 Aufgaben	468
Lösungen	470
Sachwortverzeichnis	493

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Bestimmte und allgemeine Zahlen

1.1 Geschichtliches, Zahldarstellung, Zahlensysteme

1.1.1 Geschichtliches

Zu Beginn allen mathematischen Denkens stand das Zählen. Die dazu benötigten Zahlzeichen oder *Ziffern* stammen von den Indern und wurden von den *Arabern* auf ihren Kriegszügen nach Europa gebracht, wo sie die bis dahin allgemein üblichen römischen Zahlzeichen verdrängten.

Die Verbreitung der *arabischen Ziffern* in weiten Kreisen der deutschen Bevölkerung und das Rechnen mit ihnen gelang erst dem berühmten Rechenmeister ADAM RIESE (1492–1559) durch sein im Jahr 1525 herausgegebenes Rechenbuch.

1.1.2 Zahldarstellung

Die wohl einfachste Form der Zahldarstellung ist das *Strichsystem*, wie es bei den sog. Kerbhölzern zum Notieren von Schulden üblich war (daher auch die Redewendung: Er hat etwas auf dem Kerbholz). Für größere Zahlen ging bei diesem Verfahren der Überblick verloren. Deshalb fasste man eine bestimmte Anzahl von Strichen zu Gruppen zusammen (Fünfergruppe, Zehnergruppe, ...) und gab diesen Gruppen neue Zahlzeichen. Dieses Verfahren führte zum sog. *Additionssystem*, dessen bekanntestes Beispiel die römische Zahlenschreibweise ist:

Von den Grundzeichen ($I = 1$; $X = 10$; $C = 100$; $M = 1000$) werden je zehn zur nächsthöheren Gruppe zusammengefasst; dazu gibt es noch Hilfszeichen ($V = 5$; $L = 50$; $D = 500$). Durch Addieren (lateinisch *addere*, hinzufügen) der einzelnen Zeichen lassen sich größere Zahlen darstellen. Steht ein Zeichen (Ziffer) links neben einem höheren Zeichen, bedeutet das eine Subtraktion. Damit wird die viermalige Wiederholung eines Zeichens vermieden.

Beispiel 1.1

$$\begin{aligned}
 1879 &= \text{MDCCCLXXIX} \\
 &= 1000 + 500 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 10 - 1 + 10 \\
 1993 &= \text{MXMIII} \\
 &= 1000 - 10 + 1000 + 1 + 1 + 1
 \end{aligned}$$

(Häufig wird auch die Schreibweise MCMLXXXIII oder MCMXCIII verwendet.)

Auch dieses Verfahren erwies sich bei noch größeren Zahlen und vor allem beim Addieren als sehr umständlich.

1.1.3 Zahlensysteme

Deshalb traf es sich gut, dass die Araber mit den indischen Zahlenzeichen auch das von den Indern stammende Positionssystem¹⁾ nach Europa brachten, das erst die Darstellung von beliebig großen Zahlen in der heutigen einfachen Form mittels neun Ziffern und der Null als Zeichen für eine leere Stelle ermöglichte.

In diesem System werden je zehn Einheiten (Einer, E) zu einer neuen Gruppe, den Zehnern, Z, zusammengefasst; davon wieder zehn zu einem Hunderter, H, usw. Jedoch wird für diese übergeordneten Gruppen - und das macht dieses System jetzt so übersichtlich und einfach - kein neues Zeichen wie bei den Römern eingeführt, sondern sie werden *durch ihre Stellung* innerhalb des ganzen Zahlzeichens *kenntlich gemacht*. In dem römischen Zeichen III für drei hat jede der drei Ziffern den Zahlenwert 1, und da es sich um ein Additionssystem handelt, ergibt sich die ganze Zahl durch Addition der drei Einzelwerte. In dem Zahlzeichen 111 für einhundertelf haben ebenfalls alle drei Ziffern den Zahlenwert 1, jedoch stehen sie innerhalb des ganzen Zahlzeichens an verschiedenen Stellen. Sie haben also *verschiedene Stellenwerte*, und zwar steht der niedrigste Stellenwert – der Einer – am weitesten rechts.

Beispiel 1.2:

$$\begin{aligned}
 1993 &= 1\text{T} + 9\text{H} + 9\text{Z} + 3 \\
 &= 1000 + 900 + 90 + 3 \\
 &= 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0
 \end{aligned}$$

[Über die Schreibweise und Bedeutung von $10^3, \dots, 10^0$ siehe Abschnitt 6.1]

Da jeweils zu Zehnergruppen zusammengefasst wird, spricht man von einem *dekadischen* (griechisch *deka*, zehn) Positionssystem oder von einem *Dezimalsystem* (lat. *decem*, zehn). Die Zahl zehn heißt auch *Basis* (Grundzahl) des Systems.

Andere Zahlensysteme wie das *Zwölfersystem* (sprachliche Überreste: Dutzend, Gros) oder das *Sechzigersystem* (Sexagesimalsystem) der Babylonier (Überreste: 1 Stunde = 60 Minuten = $60 \cdot 60$ Sekunden), haben sich nicht halten können. Dafür hat ein anderes Zahlensystem, das *Dualsystem* (lat. *duo*, zwei), auch *Zweiersystem* oder *Binärsystem* (lat. *bini*, je zwei) genannt, als Rechenbasis der Computer (elektronischen Rechenanlagen) eine

¹⁾ *Position* hier in der Bedeutung: Stelle Lage Standort.

überragende Bedeutung gewonnen. – Entsprechend dem Dezimalsystem, bei dem man höchstens zehn Zeichen benötigt (0, 1, 2, ..., 9), um eine Zahl anschreiben zu können, braucht man beim Dualsystem nur zwei Zeichen (0, 1 oder O, L). Damit wird die Darstellung einer Zahl sehr aufwendig, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 1.3:

$$\begin{aligned} 1993_{10} &= \text{LLLLLOOLOOL}_2 \\ &= 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 2^3 + 0 \cdot 2^2 \\ &\quad + 0 \cdot 2^1 + 2^0 \\ &= 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 8 + 1 \end{aligned}$$

[Die Indizes (lat. *Index*, Anzeiger) 10 und 2 in der ersten Zeile geben das Zahlensystem an; L ist das Besetztsymbol, O das Leerzeichen für eine Position in Dualsystem.]

Aber es ist technisch am einfachsten, im Computer elektrische und elektronische Bauelemente zu verwenden, die nur zwischen zwei verschiedenen Zuständen (entsprechend den zwei Zeichen des Dualsystems) unterscheiden müssen:

Durch einen Draht fließt entweder ein Strom oder nicht, ein Schalter ist entweder geschlossen oder offen, ein Magnetring ist entweder rechtsherum oder linksherum magnetisiert usw.

Bei der Bedienung eines Rechners werden die Zahlen als Dezimalzahlen eingegeben; der Rechner übersetzt sie dann ins Dualsystem, ehe er mit ihnen weiterrechnet.

1.2 Bestimmte Zahlen, allgemeine Zahlen

1.2.1 Bestimmte Zahlen

Ursprünglich kannte man nur die *natürlichen Zahlen* 1, 2, 3, ..., die man als Folge des Zählens erhält. Die Folge der natürlichen Zahlen ist unbegrenzt.

Grafisch (griechisch *graphein*, zeichnen) lässt sich die Folge durch den *Zahlenstrahl* darstellen. Man trägt auf einem waagerechten Strahl (Bild 1.1) vom Anfangspunkt 0 (lat. *origo*, Anfang) aus eine beliebige Einheit, z. B. 1 cm, wiederholt nach rechts ab.

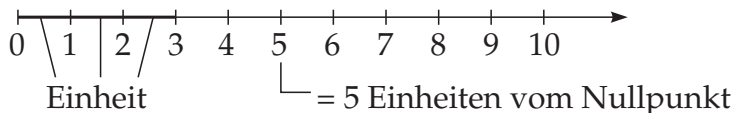


Bild 1.1

Auf diese Weise erhält man Bildpunkte, die man durch die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... kennzeichnet. Der Ausgangspunkt 0 heißt *Nullpunkt* der Zählung. Die Zahlen geben den Abstand in Einheiten vom Nullpunkt an. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit N bezeichnet.

Bald schon genügten die natürlichen Zahlen nicht mehr den Ansprüchen des täglichen Lebens. So sind zwar 50 € dem *Betrag* nach immer gleich; es ist aber ein Unterschied, ob

man sie zu bekommen hat oder jemandem zahlen muss. Diesen Unterschied kennzeichnet man durch das *Vorzeichen*, mit dem der Betrag von 50 € versehen wird. Im ersten Fall hat man 50 € gut (Guthaben: +50 €). Beträge mit einem *Pluszeichen* („und“-Zeichen, +) oder *ohne* Vorzeichen nennt man *positive Zahlen*. Als ganze Zahlen entsprechen sie den bereits bekannten natürlichen Zahlen. Beträge mit einem *Minuszeichen* („weniger“-Zeichen, –) nennt man *negative Zahlen*. Beide zusammen bilden die Menge Z der *ganzen Zahlen*.

Man bezeichnet den Schritt von den natürlichen zu den ganzen Zahlen als *erste Erweiterung des Zahlenbereiches*.

Die negativen Zahlen stellt man grafisch ebenfalls mittels eines Zahlenstrahles dar, der diesmal jedoch nach links orientiert ist (Bild 1.2).

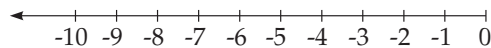


Bild 1.2

Fasst man beide Strahlen zusammen, so erhält man die *Zahlengerade* – sie besitzt keinen Anfang und kein Ende – und ist damit eine grafische Darstellung der ganzen Zahlen (Bild 1.3). Die Orientierung geschieht von links nach rechts in Richtung immer größerer Zahlen. Jede Zahl hat einen kleineren Vorgänger (z. B. $3 < 4$, „drei ist kleiner als vier“, oder $-5 < -4$, „minus fünf ist kleiner als minus vier“) und einen größeren Nachfolger (z. B. $5 > 4$, „fünf ist größer als vier“, oder $-6 > -7$, „minus sechs ist größer als minus sieben“).

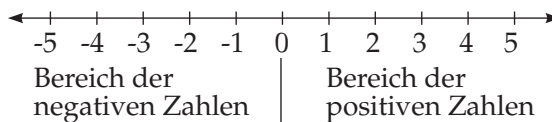


Bild 1.3

Zahlen, die vom Nullpunkt aus den gleichen Abstand haben, besitzen den gleichen *absoluten Betrag*. Man kennzeichnet den Betrag einer Größe, indem man sie in zwei senkrechte Striche, die Betragsstriche, einschließt, z. B. $|-3| = |+3| = 3$ (der Betrag von -3 ist gleich dem Betrag von $+3$, nämlich 3).

1.2.2 Allgemeine Zahlen

Alle hier bisher betrachteten Zahlen sind *bestimmte Zahlen*, weil sie eine genau bestimmte Anzahl von Einheiten angeben. Sie werden *mit Ziffern geschrieben* und spielen eine wichtige Rolle im täglichen Leben.

In der Mathematik jedoch, wo es darauf ankommt, allgemein gültige Formeln und Gesetzmäßigkeiten anzugeben und allgemeine Beweise zu führen, reichen bestimmte Zahlen allein nicht mehr aus. Das Einführen von Buchstaben zur Bezeichnung *allgemeiner Zahlen* durch den französischen Mathematiker FRANCOIS VIÉTA (1540–1603) förderte deshalb den Ausbau der Mathematik, insbesondere der Arithmetik (griechisch *arithmos*, Zahl) ganz erheblich. – Schon ein Jahrhundert vor Viéta benutzte der deutsche JOHANNES MÜLLER

(aus Königsberg in Franken) die Buchstaben zur Bezeichnung allgemeiner Zahlen. Sein frühzeitiger Tod verhinderte indes eine Ausbreitung dieser mathematischen Zeichensprache.

Bei der „Buchstabenrechnung“ verwendet man gewöhnlich die kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets: a, b, c, \dots (Ausnahme: Winkel werden mit griechischen Buchstaben gekennzeichnet). Sie stellen Zahlen dar, die keine bestimmte Einheit haben. Ihnen wird von Fall zu Fall nicht nur ein bestimmter Zahlenwert, sondern auch eine bestimmte Einheit zugeordnet. Dabei ist zu beachten, dass *ein und derselbe Buchstabe in einer Aufgabe stets ein und denselben Zahlenwert bedeutet*.

1.3 Grundrechenarten für ganze Zahlen

Ganze und allgemeine Zahlen lassen sich durch Rechenoperationen (Rechenarten) miteinander verknüpfen. Die vier bekanntesten, die sog. Grundrechenarten, sollen hier kurz wiederholt werden.

1.3.1 Die Addition

(lat. *addere*, hinzufügen)

Summand	plus	Summand	gleich	Summe
3	+	4	=	7
-3	+	4	=	4 - 3 = 1
-3	+	(-4)	=	-3 - 4 = -7
3	+	(-4)	=	3 - 4 = -1
allgemein:				
a	+	b	=	$a + b$

Dabei gilt das *kommutative Gesetz* (lat. *commutare*, vertauschen):

$$a + b = b + a$$

(1.1)

► Bei der Addition ist die Reihenfolge der Summanden beliebig.

1.3.2 Die Subtraktion

(lat. *subtrahere*, abziehen)

Minuend	minus	Subtrahend	gleich	Differenz
7	-	3	=	4
7	-	8	=	-1
7	-	(-3)	=	7 + 3 = 10
-7	-	3	=	-10
-7	-	(-3)	=	-7 + 3 = -4
allgemein:				
a	-	b	=	$a - b$

Für *beide* Rechenoperationen gilt:

► Gleiches Vorzeichen und Rechenzeichen ergeben eine Addition; ungleiches Vorzeichen und Rechenzeichen ergeben eine Subtraktion.