

Zahlentheoretische Kostproben

Für Gerd

Theo Kempermann

Zahlentheoretische Kostproben

Verlag
Harri
Deutsch 

Der Autor

Dr. T. Kempermann war in leitenden Funktionen bei der Bayer AG tätig.

Der Verlag

Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH
Gräffstraße 47
60486 Frankfurt am Main
verlag@harri-deutsch.de
www.harri-deutsch.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN: 978-3-8171-1877-9

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus –, sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autor und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

3., aktualisierte Auflage 2011

© Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2011

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, Brand-Erbisdorf <www.naake-satz.de>

Druck: fgb – freiburger graphische betriebe <www.fgb.de>

Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

1	Von Mathophilen und Mathophoben	1
2	Der Mathematiker als Homo ludens	5
3	Die Primzahlen – Thema seit 2300 Jahren	11
4	Vorsicht bei Verallgemeinerungen!	23
5	Furor mathematicus	32
6	Die Antike hatte es mit den ganzen Zahlen	36
7	Früchte vom Baum der Kombinatorik	48
8	Last und Lust des Teilens	62
9	Diophantische Gleichungen	73
10	Intermezzo: Die Taylor'sche Reihe	85
11	Imaginäre Zahlen: Wozu?	93
12	Was ist an einem Dezimalbruch Interessantes?	99
13	Irrational und doch vernünftig	109
14	Über Kettenbrüche	120
15	Die harmonische Reihe und einiges drum herum	130
16	Oft für eine Überraschung gut: Die Rekursion	145
17	π hat nicht nur mit dem Kreis zu tun	157
18	Jagd auf hohe Primzahlen	171
19	Schmerzfrees Wurzelziehen	183
20	Logarithmisches	191
21	Über Schachtel-Ausdrücke	199
22	Eine Sonderrolle der 5?	204
23	Die Addition – kontinuierlich betrieben	215
24	Im Zahlen-Universum	232
	Anhang: Mathematische Symbole	245
	Literatur	248
	Aktuelle Informationen im Internet	250
	Personen- und Sachregister	251

We here take math as
a liberal art and not
merely as a tool for
technologists

nach John A. Paulos

1

Von Mathophilen und Mathophoben

(statt eines Vorwortes)

Für Mathematik habe ich mich seit frühen Schüler-Zeiten begeistert. Vielleicht war sogar ein Schulbuch daran schuld, das wir in der Quarta (so nannte man die 7. Klasse damals) benutzten und das, soweit die Erinnerung trägt, vorteilhaft sich abhob von manchem heute den Schülern als Lehrmaterial Zugemuteten.

In der Sekunda angekommen, genügte mir der Lehrstoff des Gymnasiums nicht mehr. Ich fing an, ziemlich kühn und leichtsinnig eigentlich, Mathematik auf eigene Faust zu treiben. Dabei war es von Vorteil, dass man kaum mehr als Papier und Bleistift dazu brauchte, dieser Leidenschaft also überall frönen konnte, auch unter widrigen Umständen, wie sie alsbald eintraten.

Durch gliedweise Integration der Reihe für $\frac{1}{1+x^2}$ gelangte ich zu

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$

Auf diese Entdeckung des Reihenausdrucks für π war ich nicht wenig stolz, musste allerdings, Jahre später, zur Kenntnis nehmen, dass meine schöne Reihe von einem gewissen GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) bereits entdeckt worden war; nicht nur das, sie war in jeder etwas ausführlicheren Darstellung der Infinitesimalrechnung zu finden, von denen ich selbstverständlich keine einzige gelesen hatte. Ich erinnere mich auch gut, wie mir eines Tages plötzlich aufging, wie willkürlich im Grunde die Wahl der 10 als Basis unseres Rechensystems war; man hätte 12 nehmen können (wofür einiges sprach und spricht) oder 6 oder eben 2. Aber vom Dualsystem war damals noch keine Rede und vom Computer schon gar nicht.

Zur Berechnung von Wurzeln verwendete ich ein Verfahren, das ich die „Mittelwertmethode“ nannte. Es ging viel flotter von der Hand als das in der Schule gelehrt. Diesmal ging die Vorentdeckung sogar auf die alten Babylonier zurück. Sie hatten es (im Prinzip) ebenso gemacht.

Die Enthüllung meiner „Entdeckungen“ als längst bekannte Fakten konnte den Spaß an der Mathematik nicht mindern. Der Aha-Effekt beim selbstständigen Auffinden solcher Zusammenhänge ist unbeschreiblich; es tut den Entdeckerfreuden wenig Abbruch, wenn man feststellt: Du warst nicht der Erste (solches ist ohnehin und stets unwahrscheinlich).

Es geht also um den Spaß an der Mathematik, es geht um Mathophilie. Es scheint, prozentual gesehen, nicht viele Mathophile zu geben. Warum? Ist das gottgegeben oder zu ändern? Liegt es – was wahrscheinlich ist – in erster Linie am Erziehungssystem, an der Vermittlung in den Lernjahren? Welche Rolle spielt die oft zitierte Begabung oder Nichtbegabung für Mathematik? Kann man Mathophobe bekehren und zu Mathophilen machen?

Das alles sind schwierige Fragen. Es fällt jedoch auf, wie schnell die Zeitgenossen damit bei der Hand sind, Nichtwissen und Desinteresse an Mathematik zuzugeben. Ja, es scheint, als ob sie sich dessen sogar rühmten; ihr Bedauern klingt nicht echt; es ist, als ob sie andeuten wollten: Ich, als normaler Mensch, bin dafür – leider (gottlob?) – unbegabt.

Hier liegen die in dem berühmten Essay von C. P. SNOW über die zwei Kulturen beschriebenen Phänomene klar zutage: Man findet nur wenige Menschen, die zugeben, kein Interesse für Theater und Konzert zu haben; wenige, die sich als die Kunstbanausen bezeichnen, die sie sind; wenige, die freimütig einräumen, FRANZ KAFKA fänden sie langweilig und von SHAKESPEARE hätten sie noch nie etwas gelesen. C. P. SNOW beklagt nun nicht in erster Linie Ignoranz und Desinteresse am naturwissenschaftlich-technischen Bereich als solche; es ging ihm vielmehr um die Missachtung: Es wird mit dem Desinteresse kokettiert.

Ich glaube, dass ein beachtlicher Teil der verbreiteten Mathophobie auf das Konto Vermittlung geht, also individualhistorische beziehungsweise pädagogische Ursachen hat. Sicher gibt es hier Begabung und Missbegabung, wie überall; diesem Gesichtspunkt zuviel Bedeutung beimessen hieße aber – das muss man sich klar machen – dem durchschnittlichen Zeitgenossen, jung oder alt, die Fähigkeit absprechen, logische Zusammenhänge zu erkennen und Schlüsse zu ziehen. Die gleichen Leute erweisen sich im Alltag doch auch nicht als gerade begriffsstutzig.

Aber, heißt es, diese Zusammenhänge sind doch schwierig, obskur, jedenfalls für mich?

Sie sind es nicht; jedenfalls wird hier meist zu früh kapituliert. Aber die Vermittlung in jungen Jahren kann natürlich miserabel gewesen sein. Schneller noch als Spezialisten anderer Berufsgruppen pflegen Mathematiker das Gefühl für das ihren Hörern oder Lesern (pädagogisch) Zumutbare zu verlieren. Es sind ihnen ihre Formalismen in Fleisch und Blut übergegangen; das setzen sie ungeprüft bei ihren Scholaren auch voraus – mehr oder weniger.

Mathematische Deduktionen gehen oft zu schnell voran. Der Geübte verliert auch bei größeren Schritten den Zusammenhang nicht; für den Ungeübten reißt erstens der Faden des Verständnisses unweigerlich, wenn das Zwischen-Gedachte, Auch-Gedachte nicht *expressis verbis* da steht. Zweitens wird das Abstraktionsvermögen oft überstrapaziert; die (an sich berechnete) Tendenz zur Kürze und Prägnanz kollidiert hier mit pädagogischen Notwendigkeiten. Drittens werden keine oder wenige Beispiele gebracht. Gerade in der Mathematik liefert meist ein treffendes Beispiel den Schlüssel zum Verständnis. Viertens wird der Deduktion allzu oft der zeitliche Vorrang eingeräumt. Induktives Vorgehen ist (zunächst) besser. Selbst wenn die Deduktion verstanden, der Beweis akzeptiert ist, ver-

bleibt beim Anfänger die Frage: Wie kommt man auf so etwas? Was war die ursprüngliche Fragestellung? Wie hat das Ganze begonnen? Antwort: Es hat mit Sicherheit induktiv begonnen. Die Deduktion kommt immer am Schluss.

Starke Formalisierung hat hier natürlich ihre Gründe; sie geschieht im Interesse der Klarheit, Kürze, Unanfechtbarkeit, ja auch im Interesse einer gewissen Ästhetik, einer logischen Schönheit. Formalisierung kann aber auch Wichtigtuerei sein; man gibt sich „wissenschaftlich“, wo es nur darum geht, dem Anfänger etwas über Mengen oder über Funktionen beizubringen, oder zu erklären, was ein Grenzwert ist. Mathematische Formeln können zur Einschüchterung benutzt werden. Der Leser soll erst einmal ehrfürchtig staunen. Oder man garniert die Texte damit, auf dass sie nicht allzu simpel aussehen: Mathematik als Dekoration. Dazu dichtete KENNETH E. BOULDING:

If you do some acrobatics
with a little mathematics
it will take you far along.
If your idea 's not defensible
don't make it comprehensible
or folks will find you out,
and your work will draw attention
if you only fail to mention
what the whole thing is about.

Es gibt also einige Gründe für die Mathophobie.

Zahlen sind unser Thema

Was kann schon am System der Zahlen (ganze Zahlen, Brüche) Interessantes sein? 1, 2, 3, 4, . . . , was soll das schon hergeben? Oder geht es doch um mehr als bloß um die Basis unserer alltäglichen Rechnerei? Lässt sich die Zahlenfolge auseinander nehmen, sezieren, auf ihre Struktur hin untersuchen, und was kommt dabei heraus? Rechnen, Rechnen müssen ist öde, sicherlich (macht heute der Computer).

Ist deshalb Mathematik auch öde? Dieser Frage soll im Folgenden nachgegangen werden. Es geht also um Zahlentheorie. Vielleicht klingt das schon zu anspruchsvoll, zu wissenschaftlich. Sagen wir also: Es geht um einige wesentliche, interessante, überraschende, verblüffende Ergebnisse der Zahlentheorie. Es soll von der Unmenge des in die Zahlentheorie investierten Geistes ein Weniges herübergebracht werden: Mathematik als Erlebnis, als Aha-Erlebnis. Mathematik, betrieben auch aus reiner Erkenntnis-Lust, als eine „liberal art“, wie es im Motto heißt. Mathematik als Steckenpferd. Das ist es auch für den Autor geblieben.

Dies ist kein Lehrbuch und schon gar kein Bericht über zahlentheoretische Neuentdeckungen (Sie haben richtig gehört: In der Mathematik gibt es Entdeckungen wie in der Naturwissenschaft). Es ist allerdings in gewissem Sinne ernsthaft, keine Sammlung von Denksportaufgaben, Anleitungen zum Zahlenraten und Streichholzspielchen. Das wird neuerdings gern als Unterhaltungsmathematik bezeichnet. Es wird hier auch nicht versucht, die Mathematik gleichsam im Ausweichen auf ihre Peripherie schmackhaft

zu machen; etwa, indem man über ihre Geschichte und ihre Geschichten berichtet, von bestimmten Anwendungen handelt, ihre Beziehung zur Kunst, zum Geistesleben überhaupt erörtert.

Wir verharren, um im Bilde zu bleiben, im Zentrum, bei den Problemen und Ergebnissen der Zahlenlehre selber: Aussagen und Vermutungen, empirische Ergebnisse, Beweise. Natürlich sind alle schwierigen Ableitungen ausgespart.

Die Auswahl der behandelten Themen ist zwar im Prinzip willkürlich, doch es wurde versucht, eine grob gerasterte Systematik durchzuhalten und wenigstens einen lockeren Zusammenhang der Einzelthemen herzustellen.

Es muss an Kenntnissen vorausgesetzt werden, was ein Abiturient normalerweise lernt oder was davon, einschränkend gesagt, hängen blieb oder doch hängen geblieben sein sollte. Der Anhang ist gegebenenfalls und zwecks Wiedererinnerung zu Rate zu ziehen. Es gibt Bücher, die ab ovo beginnen und keine Vorkenntnisse fordern, teilweise sogar den Ehrgeiz haben, ohne Formeln auszukommen. Hier befindet sich der Autor stets in einem Dilemma: Notwendigerweise werden solche Arbeiten umständlich, langatmig, können nur das Allereinfachste bringen und sind deshalb für den Mathematik-Normalverbraucher ungenießbar. Ohne ein wenig „Anstrengung des Begriffs“ geht es nun einmal nicht. Es soll doch gerade der Gourmet – oder der es werden möchte – angesprochen werden. Also werden wir uns gegebenenfalls bis zu Integralen vorwagen.

Die Zahlentheorie, sagt man, ist die Königin der Mathematik. Sie vermag mehr zu faszinieren als jedes andere Teilgebiet. G. H. HARDY schreibt im Vorwort zu seinem berühmten Buch *An Introduction to the Theory of Numbers*: „... the subject matter being so attractive, that only extravagant incompetence could make it dull“.

Dem ist hier nichts weiter hinzuzufügen.

Was sagen Sie zu meiner neuen Mengentheorie, Herr Professor?
Aber Herr Kandidat, die gilt ja bloß für die leere Menge!
Das ändert an der logischen Schönheit meiner Theorie nichts.

so geschehen an einem Universitätsinstitut

2

Der Mathematiker als Homo ludens

Was treibt den Mathematiker? Ist Mathematik Spiel oder Ernst? Zahlen – sind das Zeichen, Symbole für Reales (gar – als Struktur – die einzig erkennbare Realität selber?) – oder sind sie etwas bloß Gedachtes? Ist Mathematik lediglich die Grundlage jeglicher Messtechnik oder auch ästhetisches Vergnügen? Sicher gibt es neben der sinnlichen Schönheit auch eine logische; inwieweit ist sie hier präsent? Zahlen, Zeichen, Rechnerei – sind das bloß alltägliche Trivialitäten oder hat das alles auch mit Philosophie zu tun?

Kein Zweifel: Mathematik hat auch mit Philosophie zu tun. Das wusste die Philosophie seit ihren Anfängen. Die Mathematik ist eben alles zugleich: Sie ist Alltagskram, Rechnerei, Basis der empirischen Wissenschaft; eine sehr praktische, lebensnotwendige, durchaus ernste Angelegenheit. Sie ist darüber hinaus Spiel des sich selbst genügenden Geistes, im wahren Wortsinne Selbstzweck, Produkt reinen Erkenntnistriebes. Ihre Theoreme und Beweise können wahre Kunstwerke sein, bewundernswert nicht allein wegen der hier investierten Erfindungs- und Kombinationsgabe; sie sind einfach „schön“. Was hier erfunden und gefunden wurde, ist teils von höchst praktischer Bedeutung, teils ohne einen erkennbaren praktischen Nutzen (Letzteres zuzugeben scheuen sich viele Mathematiker). Mathematik ist, um die englischen Ausdrücke zu gebrauchen, *art* und *science* zugleich.

Indem wir unseren Blick wieder auf Zahlen und Zahlensysteme verengen: Was kann schon an Zahlen interessant sein?

Zunächst ist es reizvoll, der Frage nach der Ur-Funktion der Zahl nachzugehen. Zahlen bilden die Struktur der Vielheit ab; es gibt die Zahl als Maßzahl, Messzahl, als benannte Zahl: 3,07 cm, 5,1 kg, 16,5 sec; diese ist kontinuierlich veränderlich. Ferner gibt es die Zahl als Anzahl; dann ist sie diskontinuierlich veränderlich: 8 Bäume, 5 Schafe, 12 Häuser. Mit den letzteren muss alles angefangen haben. Am Anfang war die natürliche Zahl: 1, 2, 3, 4, . . . Am Anfang war das Zählen: $a_n = a_{n-1} + 1$. Alle Rechenarten bis hin zum Logarithmieren und Wurzelziehen (man könnte noch weitere, „höhere“ Rechenarten konstruieren) gehen letztlich auf dieses simple Weiterzählen zurück: $1 = 1$; $2 = 1 + 1$; $3 = 2 + 1$ und so weiter.

Doch was „ist“ eine Zahl wie eins, zwei, drei . . . ? Zahlen bilden eine Struktur, sagten wir; jedenfalls ist das eine Struktur, die mit der uns umgebenden Realität zu tun hat, sie in noch zu bestimmender Weise symbolisiert oder abbildet. Wie „entstehen“ Zahlen? Kein Stein gleicht dem anderen, kein Blatt gleicht dem anderen. Wenn wir sagen: Dort auf der Höhe stehen 8 Bäume, so hat bereits ein Abstraktionsprozess stattgefunden: Die Gegenstände dort haben bestimmte Eigenschaften, die es uns gestatten, sie unter dem Namen/Begriff

Baum zusammenzusehen. Jetzt erst werden sie zählbar: 1, 2, 3, . . . , 8. Indem wir von ihren gleichwohl vorhandenen Verschiedenheiten absehen, werden sie zählbar. Mit der Angabe „8 Bäume“ wird ein Stück Wirklichkeit erfasst; Realität bildet sich ab – doch gleichzeitig und vollkommen in eins damit bildet sich eine von uns gemachte Konstruktion ab: Wir haben ja, bevor wir zählen konnten, eine Zusammenfassung vorgenommen. Wir sind es, die begrifflich zusammenfassen. War der achte, kleinere Baum noch ein Baum zu nennen, oder war es vielmehr ein Strauch? Sollten wir deshalb sagen: 7 Bäume?

Zahlen symbolisieren „harte“ Realität und etwas Gedachtes zugleich. Wir werfen ein Netz aus lauter logischen Konstruktionen (Zahlen eingeschlossen) über unsere Umwelt und charakterisieren diese am Netz, durch das Netz, an Hand des Netzes. Das Netz machen zwar wir, aber die Relation zwischen dem Netz und dem darunter (Zugrunde-)Liegenden ist nicht beliebig. Von Paris nach Moskau ist es in harter Realität „weiter“ als von Paris nach London, einerlei, welche Theorie vom Raum wir zugrunde legen, einerlei, welche Längeneinheit wir für die Maschen des Netzes verwenden, was jedes Mal völlig verschiedene Zahlen ergibt. Primäre Welt-Orientierung und -Bewältigung, Welt-Erkenntnis und damit schließlich auch (Natur-)Wissenschaft hat mit der Relation von Vielheiten zueinander zu tun. „Relation zwischen . . .“ ist erkennbar. Das Einzelne ist unerkennbar. Diesen Satz findet man schon bei Aristoteles. Vielheit wiederum ist charakterisiert durch Individuation, hierarchisch-begriffliche Ordnung, kausale oder andere Verknüpfung, Anordnung in Raum und Zeit und so fort. Das Einzelne können wir höchstens als *dieses* Einzelne *benennen*, aber nicht ohne Vergleich, Zuordnung zu anderem *erfassen*.

Es heißt – und oft mit bedauerndem Unterton –, die empirische Wissenschaft sei wesentlich (bloß) mathematisch verfasst. Das ist ungenau ausgedrückt. Empirische Wissenschaft ist primär reduktionistisch. Das genannte gezielte und systematische Absehen von . . . ist das erste. So werden, in einem zweiten Schritt, Strukturen erkannt, die dann durch Symbole, darunter Zahlen, beschrieben werden.

Die benannte Zahl symbolisiert also Realität, besser gesagt, eine reale Struktur, einerlei, ob wir es mit Anzahlen (= natürlichen Zahlen) oder mit Maßzahlen (= natürlichen Zahlen, Brüchen) zu tun haben. Mathematik entsteht, indem man die Benennungen wegnimmt und zusieht, was sich über die Zahlen als solche sagen lässt. Die dabei gefundenen Gesetzmäßigkeiten kann man dann gegebenenfalls auf die benannten Zahlen und damit auf die Welt-Beschreibung zurückbeziehen.

Der Mathematiker als Homo ludens – wo fängt das Spiel an, wo hört es auf? Es verhalten sich die Teilgebiete (bzw. Anwendungen) der Mathematik durchaus unterschiedlich. Statistik ist ein der Praxis recht deutlich zugewandtes Fach; bei der Geometrie und der Arithmetik ist das weitgehend der Fall. Die Zahlentheorie hat dagegen wenig signifikanten unmittelbar praktischen Nutzen.

Nichtsdestoweniger wird sie mit Leidenschaft betrieben. Leidenschaft ist hier durchaus wörtlich zu nehmen. Bei der Beschäftigung mit bestimmten logisch strukturierten Themen, in der Mathematik insbesondere, treten Sucht-Effekte auf; man hat das auch „Mausefallen-Effekt“ genannt. Erfolgreiche Problembewältigung löst hier spezielle Lustgefühle aus, die sich derart steigern können, dass der Betroffene glaubt, ihrer nicht mehr

entraten zu können. Ob man das nun nur Gewohnheit nennt oder bereits Sucht, ob man solche Abhängigkeit bereits mit einer Drogenabhängigkeit vergleicht, ist hier nicht zu entscheiden und gegebenenfalls Geschmackssache.

Besagtes Hochgefühl kann jedenfalls sehr stark werden; Mathematik kann in diesem Sinne regelrecht *beglücken*. Aber es gibt eben auch die Kehrseite; das Hochgefühl hat seinen Preis. Wenn sich der ersehnte Erfolg nicht einstellen will, gelingt es dem Bedauernswerten oft nicht mehr, sich vom Problem zu lösen. Das ist der Mausefallen-Effekt: Die Tür klappt hinter Dir zu und Du kommst nicht mehr heraus. Das Denken rotiert – gewollt und ungewollt zugleich – weiter um die Aufgabe. Wie dem Teufelskreis enttrinnen? Mitunter hilft die ablenkend wirkende Zwischenschaltung eines einfacheren Problems. Oder der Alltag ist es, der mit seinen harten Realitäten für die notwendige Ablenkung sorgt.

Der Mathematiker als Homo ludens. Wir werden dieser besonderen Spezies Wissenschaftler überall in dieser Darstellung begegnen. Wie sehen nun seine Spiele aus? Gehen wir also hinein in dieses Metier. Es fängt ganz harmlos an.

Palindrome sind Worte oder Sätze, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich lauten. Das bekannteste Beispiel ist das von Schopenhauer: *Ein Neger mit Gazelle zagt im Regen nie*. Ein anderes, sehr schönes Palindrom von erstaunlicher Länge, in englischer Sprache, lautet: *Doc, note, I dissent. A fast never prevents a fatness. I diet on cod.* (Doktor, hören Sie, ich kann Ihnen nicht zustimmen; Fasten verhindert nicht das Dickwerden; ich mache eine Diät mit Kabeljau). Wer mag das erfunden haben, und wie lange hat er dazu gebraucht?

Die Beschränkung „vorwärts und rückwärts gleich“ erweist sich als rigoros. Es gibt nur wenige leidlich sinnvolle Palindrom-Sätze. Das Kabeljau-Palindrom ist überdies auch noch aktuell.

Nun geht es hier nicht um Wort-Palindrome; wir fragen, wie es mit Zahlen-Palindromen bestellt ist. 12 521 und 262 und 24 355 342 sind offensichtlich solche. Sie sind leicht zu erzeugen und man kann sie beliebig lang machen. Was lässt sich über sie sagen?

Man macht dabei zunächst eine merkwürdige Beobachtung. Die meisten (alle?) natürlichen Zahlen lassen sich zu Palindromen umformen, wenn man die vorwärts gelesene zur rückwärts gelesenen addiert und das gegebenenfalls einige Male wiederholt.

Das zeigen die folgenden Beispiele, bei denen nach 2, 3, 1, 2 Additionen das Palindrom auftaucht. Spiegelzahlen wie 123 und 321 erzeugen natürlich das gleiche Palindrom. Je nach Startzahl kann das Verfahren allerdings mühsam werden.

Palindrom-Beispiele

28	59	112	3 049
<u>82</u>	<u>95</u>	<u>211</u>	<u>9 403</u>
110	154	323	12 452
<u>011</u>	<u>451</u>		<u>25 421</u>
121	<u>605</u>		37 873
	<u>506</u>		
	1 111		

Nun braucht man beim Zahlenpaar 97/79 immerhin 6 Schritte, bis man zum Palindrom gelangt; es heißt 44 044. Beim Paar 98/89 sind es sogar 24 Schritte, und man endet bei 8 813 200 023 188. Alle übrigen Zahlen unter 100 benötigen maximal 4 Schritte. Die kleinste Zahl mit Schrittgröße 3 ist übrigens 59, die kleinste mit Schrittgröße 4 ist 69. Schrittzahl 5 kommt nicht vor.

Jetzt liegt natürlich die Frage nahe: Endet man immer auf diese Weise bei einem Palindrom? Das wird vermutet, aber noch niemand konnte es beweisen. Es gibt Problemzahlen, die entweder nach sehr vielen Schritten oder auch überhaupt nicht das erwartete Symmetriebild zeitigen. Man weiß es nicht; es ist hier zu bedenken, dass die Stellenzahl wegen der fortgesetzten Addition kontinuierlich zunimmt. Die kleinste dieser Problemzahlen ist 196. Sie wurde von P. R. MOLS aus Riga untersucht. Er gab auf nach 75 Schritten: Kein Palindrom hatte sich gezeigt.¹⁾ Diese Teufelszahl wurde 1975 einem Computertest unterworfen; nach 237 310 Additions-Schritten gab auch der Computer auf. Mittlerweile (Stand 2010) wurde die Suche bis zu einer Zahl mit 300 Millionen Stellen fortgesetzt, ohne zu einem Palindrom zu führen.²⁾

Man fand immerhin 249 Zahlen unter 10 000, die jeweils nach 100 Additions-Schritten noch kein Palindrom gaben (für die jeweilige Spiegelzahl gilt natürlich dasselbe). Merkwürdigerweise gaben die übrigen Zahlen unter 10 000, das sind etwa 95 %, stets ein Palindrom nach weniger als 24 Schritten, mit der genannten Ausnahme 98/89, die genau 24 Schritte benötigt.

Das größte derzeit bekannte Palindrom erzeugt die Zahl 1 186 060 307 891 929 990, die nach 261 Additionen einen 119-stelligen Wert liefert;³⁾ das 89er Palindrom hatte nur 13 Stellen.⁴⁾ Der aktuelle Stand der Suche nach Palindromzahlen kann der in Fußnote 3) genannten Quelle entnommen werden.

Natürlich ist das Palindrom-Problem direkt mit dem gewählten Stellenwertsystem (hier: Dezimalsystem) verknüpft. Es ist nun für andere Stellenwertsysteme die gleiche Vermutung aufgestellt worden, nach der stets nach x Additionen ein Palindrom erscheinen muss. Es zeigte sich: Für das Dualsystem zumindest (Basis 2) ist die Vermutung falsch. Hier fand man Zahlen, die niemals ein Palindrom liefern können wie $(10110)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$. Im Zehnersystem heißt diese Zahl schlicht 22. Unterwirft man die Dualform dem genannten Additionsverfahren, so zeigen sich immer längere, nach einem bestimmten Gesetz gebildete Zifferschlangen; letztere können, eben wegen dieser Regel, niemals ein Palindrom konstituieren.

Verblüffend; aber wie kommt man auf so etwas? Unter den ersten 100 Zahlen war uns soeben die Zahl 89 aufgefallen, die als einzige erst nach 24 Additionen ein Palindrom erzeugt. Dazu gibt es eine merkwürdige Parallele.

Wählen wir eine natürliche Zahl Z beliebiger Größe und bilden ihre Quersumme zweiter Ordnung (Was ist das? Als Beispiel diene die Zahl 139; ihre Quersumme zweiter Ordnung

¹⁾ KORDEMSKI, S. 197

²⁾ Aktuelle Informationen zum Stand des 196-Problems gibt es unter <http://www.p196.org/>.

³⁾ <http://www.jasondoucette.com/worldrecords.html>

⁴⁾ GARDNER I, S. 260–261

ist $1^2 + 3^2 + 9^2 = 91$). Gegebenenfalls ist diese Operation mehrfach zu wiederholen. Welche Ausgangszahl Z man nun auch wählt, es kommt dabei immer entweder 1 oder 89 heraus. Andere Zahlen treten nicht auf, gleich, wie groß Z ist. Hier ist sie also wieder, die mysteriöse 89.

Es lässt sich das noch quantifizieren: 17 Zahlen unter 100 enden, so behandelt, bei 1, die übrigen landen alle bei 89 (wenn man die Operation auf 89 selbst anwendet, erhält man in zyklischer Folge nach 8 Schritten wieder 89).

Wir beweisen diese Gesetzmäßigkeit halbempirisch. Zunächst sind alle Quersummen zweiter Ordnung von 4-, 5-, 6-, ..., 12-stelligen Zahlen maximal dreistellig; erst eine 13-stellige Zahl kann (maximal) eine 4-stellige Zahl als Quersumme zweiter Ordnung geben, denn 13 mal 9^2 ist 1 053. Aber dann kommt man im nächsten Schritt ebenfalls zu einer dreistelligen Zahl. Und so fort. Ferner sind, wie leicht ersichtlich, alle Quersummen zweiter Ordnung von dreistelligen Zahlen kleiner als diese Zahlen selbst. Das heißt: Wie groß man auch immer die Zahl Z wählt, man gerät schließlich in den Bereich der zweistelligen Zahlen, jedenfalls nach hinreichend vielen Operationen der genannten Art. Nun probieren wir alle zweistelligen Zahlen durch, was nicht viel Mühe macht; denn es ist beispielsweise die Rechnung für 79 dieselbe wie für 97; ferner treten häufig die gleichen Zwischensummen auf, in welchem Falle man nicht weiterzurechnen braucht. Mit 20 als Ausgangszahl findet man beispielsweise 4, 16, 37, 58, 89 Ende; bei 45 findet man 41, 17, 50, 25, 29, 85, 89 Ende; bei 44 jedoch 32, 13, 10, 1 Ende. So geht es fort bis $Z = 100$. Damit haben wir zwar den Beweis erbracht; doch wie ist man auf diese Kuriosität gekommen?

Zu den erstaunlichen Leistungen der Zahlentüftler gehören auch die folgenden Sequenzen: Die Zahlen 2, 3, 7 sowie 1, 5, 6 zeigen die Beziehung

$$(2.1) \quad \begin{aligned} 2 + 3 + 7 &= 1 + 5 + 6 \\ 2^2 + 3^2 + 7^2 &= 1^2 + 5^2 + 6^2 \quad (r = 2) \end{aligned}$$

Das ist noch nicht sehr aufregend. Wir gehen also einen Schritt weiter und wählen in der ersten Gruppe 0, 5, 5, 10 und in der zweiten 1, 2, 8, 9. Jetzt gilt

$$\begin{aligned} 0 + 5 + 5 + 10 &= 1 + 2 + 8 + 9 \\ 0^2 + 5^2 + 5^2 + 10^2 &= 1^2 + 2^2 + 8^2 + 9^2 \\ 0^3 + 5^3 + 5^3 + 10^3 &= 1^3 + 2^3 + 8^3 + 9^3 \quad (r = 3) \end{aligned}$$

Schon besser. Wir bringen jetzt ein Beispiel mit fünf Summanden auf jeder Seite: 1, 4, 12, 13, 20 und 2, 3, 10, 16, 19. Wiederum gilt:

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 12 + 13 + 20 &= 2 + 3 + 10 + 16 + 19 \\ 1^2 + 4^2 + 12^2 + 13^2 + 20^2 &= 2^2 + 3^2 + 10^2 + 16^2 + 19^2 \\ 1^3 + 4^3 + 12^3 + 13^3 + 20^3 &= 2^3 + 3^3 + 10^3 + 16^3 + 19^3 \quad (r = 3) \end{aligned}$$

Man hat sogar Lösungen gefunden für Systeme, die sechs Summanden auf jeder Seite der Gleichung enthalten und bis zur fünften Potenz ($r = 5$) gültig sind:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} 1^r + 6^r + 7^r + 17^r + 18^r + 23^r &= 2^r + 3^r + 11^r + 13^r + 21^r + 22^r \\ \text{mit } r &= 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

Natürlich erfüllen auch alle diese Gleichungen den Trivialfall $r = 0$.

Nun wollen wir weiterhin wissen, ob die aufgeführten Zahlengruppen die einzigen sind, die diesen Potenzbeziehungen genügen. Das ist nicht der Fall. Es gibt sogar jeweils unendlich viele solche Zahlensätze. Zwei allgemeine Formeln dafür seien hier genannt:

Für Gleichung (2.1) mit $r = 1$ oder 2 gilt

$$(2.3) \quad (a+c)^r + (b+c)^r + (2a+2b+c)^r = c^r + (2a+b+c)^r + (a+2b+c)^r$$

Für $a = 1, b = 2$ und $c = 1$ ergibt sich das spezielle System (2.1); für $a = 3, b = 1$ und $c = 2$ findet man

$$5^r + 3^r + 10^r = 2^r + 9^r + 7^r \quad (r = 1 \text{ oder } 2)$$

Im Falle (2.2) gibt es die folgende generelle Lösung:

$$\begin{aligned} & a^r + (a+4b+c)^r + (a+b+2c)^r + (a+9b+4c)^r + (a+6b+5c)^r \\ & \quad + (a+10b+6c)^r \\ & = (a+b)^r + (a+c)^r + (a+6b+2c)^r + (a+4b+4c)^r + (a+10b+5c)^r \\ & \quad + (a+9b+6c)^r \end{aligned}$$

mit $r = 1, 2, 3, 4$ oder 5

Den Werten $a = 1, b = 1$ und $c = 2$ entspricht die spezielle Lösung (2.2); für $a = 2, b = 2$ und $c = 3$ erhalten wir beispielsweise

$$(2.4) \quad 2^r + 10^r + 13^r + 29^r + 32^r + 40^r = 4^r + 5^r + 20^r + 22^r + 37^r + 38^r$$

Den Beweis für diese Generalformeln liefert das recht mühsame Ausrechnen aller Potenzausdrücke nach dem binomischen Lehrsatz und nachfolgende Addition. Es ergibt sich jeweils Identität beider Seiten.

Mit solchen Problemen haben sich die Mathematiker CHRISTIAN GOLDBACH (1690–1764) und LEONHARD EULER (1707–1783) beschäftigt. Besonders bewundernswert ist die Aufstellung der Gleichung (2.2) und ihrer allgemeinen Version (2.4).

Homo ludens: Was fängt man an mit Relationen wie (2.4)? Diese Frage haben sich offenbar die Mathematiker nicht gestellt.

$2^{11213} - 1$ is prime!

*Sonderstempel der US-Post
im Staat Illinois aus dem Jahre 1968*

3

Die Primzahlen – Thema seit 2300 Jahren

Beweis-Lage. Der Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, kann auf sehr verschiedene Art geführt werden. Der älteste stammt von EUKLID und ist demnach besagte 2300 Jahre alt. Er beruht auf dem folgenden einfachen Satz: Wenn von den zwei Posten einer Summe oder Differenz der eine durch eine Zahl p teilbar ist, der andere nicht, so ist die Summe (Differenz) nicht durch p teilbar. Also: 31 mal 5 plus 4 kann nicht durch 5 teilbar sein. Deshalb ist, nach EUKLID, der Ausdruck $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 - 1$ weder durch die Primzahl 2 noch durch die Primzahlen 3, 5, 7, 11 teilbar. 2 809 muss also entweder selber prim sein oder eine Primzahl enthalten, die > 11 ist (im vorliegenden Falle ist $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 - 1 = 2809 = 53^2$; 53 ist prim). So kann man fortfahren: Der Ausdruck $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 - 1$ ist durch keine der Primzahlen ≤ 13 teilbar, enthält also mindestens einen Primfaktor > 13 .

Aus der entsprechenden Verallgemeinerung folgt sogleich, dass es eine letzte Primzahl nicht geben kann. Es ist ferner, wie sich von selbst versteht, damit eine obere Schranke für die $(n + 1)$ -te Primzahl gegeben, denn es muss sein:

$$p_{n+1} \leq p_1 p_2 p_3 \dots p_n - 1, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5 \quad \text{usw.}$$

So geht es die Reihe der Primzahlen aufwärts. Das sich so ergebende Limit für p_{n+1} liegt jeweils sehr hoch; es gilt beispielsweise für $n = 8$ die einigermaßen groteske Abschätzung

$$p_9 \leq p_1 p_2 p_3 \dots p_8 - 1 = 9\,699\,690 - 1$$

Die Abschätzung ist zwar „richtig“; es ist aber $p_9 = 23$. Man kann die Abschätzung verbessern, indem man setzt

$$p_9 \leq p_2 p_4 p_6 p_8 - p_1 p_3 p_5 p_7 = 3317$$

da für die Differenz rechts vom $<$ -Zeichen die oben genannte Argumentation natürlich auch gilt. Hiermit sind wir dem wahren Wert von p_9 immerhin näher gekommen. Verfolgt man diesen Gedankengang weiter, so gelangt man zu der generellen und weiter verbesserten Abschätzung

$$\begin{aligned} p_{n+1} &< \sqrt{p_1 p_2 p_3 \dots p_n} && \text{also z. B.} \\ p_{11} = 31 &< p_1 p_2 p_3 \dots p_{10} - 1 && = 6\,469\,693\,229 \\ p_{11} = 31 &< p_2 p_4 p_6 p_8 p_{10} - p_1 p_3 p_5 p_7 p_9 && = 107\,413 \end{aligned}$$

Die letztgenannte Abschätzung wird jetzt verbessert zu

$$p_{11} = 31 < \sqrt{p_1 p_2 p_3 \dots p_{10}} = 80\,434$$

Das ist eine schöne, handliche Formel, die wir wie folgt beweisen: Sei n gerade. Wir definieren zwei Zahlen q_1 und q_2 , die im vorliegenden Beispiel so lauten:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} q_1 &= p_2 p_4 p_6 p_8 - p_1 p_3 p_5 p_7 > 1 \\ q_2 &= p_2 p_4 p_6 p_8 - p_1^2 p_3 p_5 p_7 > 1 \quad \text{mit } n = 8 \end{aligned}$$

q_1 und q_2 sind voneinander verschieden, beide sind nicht durch $p_1 p_2 p_3 \dots p_8$ teilbar, und sie können keinen gemeinsamen Faktor p_i haben; denn gäbe es einen solchen, würde durch Subtraktion $q_1 - q_2$ folgen – mit $p_i Q_1 = q_1$ und $p_i Q_2 = q_2$ –

$$p_i(Q_1 - Q_2) = 2p_3 p_5 p_7$$

was offenbar unmöglich ist, denn die rechte Seite ist nicht durch p_i teilbar. q_1 und q_2 enthalten also nur voneinander verschiedene Primfaktoren, jeweils mindestens einen. Wir nennen sie p_r und p_s . Sei q_1 die p_r enthaltende Zahl und $p_r > p_s$, so folgt notwendig $r \geq 10$. Sei ferner eine dritte Zahl definiert durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} q_3 &= p_1 p_3 p_5 p_7 p_9 - p_2 p_4 p_6 p_8, \quad \text{also } q_3 < p_1 p_3 p_5 p_7 p_9; \quad \text{dann gilt} \\ q_1 &< p_2 p_4 p_6 p_8 \quad \text{und} \quad q_1 q_3 < p_1 p_2 p_3 \dots p_9; \quad \text{ferner} \\ p_{10}^2 &\leq p_r^2 < p_1 p_2 p_3 \dots p_9 \quad \text{und} \quad p_{10} < \sqrt{p_1 p_2 p_3 \dots p_9} \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. Man verallgemeinert leicht von 8 auf (gerades) n . Gleichung (3.1) gilt entsprechend für alle $n \geq 6$.

Ist n ungerade, so verläuft die Argumentation analog, was hier nicht dargestellt werden soll. Dabei muss die Bedingung $n \geq 5$ erfüllt sein. Für alle $n \geq 4$ gilt mithin (dass $n = 4$ miterfasst wird, stellt man empirisch fest)

$$p_{n+1} < \sqrt{p_1 p_2 p_3 \dots p_n}$$

Auch das ist natürlich noch eine recht grobe Annäherung an die wirkliche Primzahlsequenz. Es sind aber damit die Möglichkeiten des Euklid'schen Ansatzes erschöpft. Um die Grenze für die nächste Primzahl näher heranzurücken, sind andere Hilfsmittel erforderlich.

P. L. TSCHERBYSCHEFF (1821–1894) bewies im Jahre 1852, dass für alle r gilt:

$$(3.2) \quad p_{r+1} < 2p_r$$

Für unser obiges Beispiel heißt das: $p_9 = 23 < 2p_8 = 38$.

Ist p also eine bestimmte Primzahl, dann ist die jeweils nächste kleiner als das Doppelte von p . Verglichen mit den genannten ersten Abschätzungen ist das ein gewaltiger Fortschritt. Geht man allerdings höher in der Primzahlreihe hinauf, wirkt selbst diese Regel noch wenig befriedigend. Es ist z. B. $p_n = 1399$ eine Primzahl, und die nächste lautet $p_{n+1} = 1409$. Die Abschätzung liefert aber nur $2 \text{ mal } 1399 = 2798$ als Obergrenze für p_{n+1} .

Es ist bis heute nicht gelungen, zu beweisen, dass zwischen zwei Quadratzahlen jeweils mindestens eine Primzahl liegt, entsprechend den Fällen

$$9 < p_5 = 11 < 16 \quad 25 < p_{11} = 31 < 36 \quad \text{und so fort.}$$

Hier liegt eine der vielen zahlentheoretischen Vermutungen vor, die „wahrscheinlich“ zutreffen, da man kein Gegenbeispiel in der Zahlenreihe bisher gefunden hat; das gibt aber keine Sicherheit, da die Zahlenreihe unendlich ist und man sie nicht vollständig durchprüfen kann.

Dass die von dieser Vermutung angegebene Eingrenzung wesentlich enger ist als die von TSCHERBYSCHEFF angegebene, erhellt aus dem folgenden Vergleich: Es ist

$$100^2 = 10\,000 \quad \text{und} \quad 101^2 = 10\,201$$

In diesem Falle muss es – laut Vermutung – eine Primzahl p_r geben mit

$$100^2 < p_r < 101^2 = 1,0201 \cdot 100^2 \quad (\text{es gibt sie!})$$

während die Formel von TSCHERBYSCHEFF äquivalent ist der Ungleichung

$$(3.3) \quad n < p_r < 2n \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{d. h. hier} \\ 100^2 < p_r < 2 \cdot 100^2$$

Das letztere Intervall ist also fast doppelt so groß wie das der Vermutung. Es folgt noch der Beweis für Gleichung (3.3): Die nächstniedere Primzahl $p \leq n$ kann höchstens n sein. Nehmen wir das an. Es ist dann nach TSCHERBYSCHEFF $p_r < 2p$. Damit liegt p_r zwischen n und $2p = 2n$. Gilt aber beispielsweise $p = n - 1$, so folgt $n < p_r < 2(n - 1) = 2n - 2$, und das ist erst recht $< 2n$ usw.

Ein Beweis anderer Art für die Unendlichkeit der Primzahlsequenz stammt von LEONHARD EULER. Er beruht letztlich auf der Divergenz der harmonischen Reihe. Diese lautet:

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad \text{ad infinitum}$$

S wird also bei unbegrenzt wachsender Gliederzahl unendlich groß. Weiterhin: Jede Zahl N lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen bzw. Primzahlpotenzen darstellen. Es ist z. B. $588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$, $6\,655 = 5 \cdot 11^3$ und so fort. Nehmen wir jetzt an, es gäbe eine größte Primzahl, die wir p_s nennen; dann würde gelten

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_s^{\alpha_s}, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5 \quad \text{usw.}$$

mit natürlichen Zahlen α_i einschließlich der Null und $1 \leq i \leq s$; entsprechend kommt man so zu der Formel

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}}$$

Nun betrachten wir die folgende geometrische Reihe, die bei Fortsetzung ad infinitum die rechts stehende Summe hat (Erinnerung aus dem Schulunterricht; der Quotient q ist hier $1/p_1$):

$$(3.4) \quad 1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_1^3} + \dots + \frac{1}{p_1^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \quad \text{mit } p_1 = 2$$

Wir machen je eine analoge Reihe für $p_2 = 3$, für $p_3 = 5, \dots$, für $p_s = \dots$ und multiplizieren dann diese s Ausdrücke miteinander. Es resultiert

$$R = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_3}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_s}}$$

Werden jedoch alle Reihen in R entsprechend (3.4) miteinander multipliziert, kommt in der so entstehenden Summe der Kehrwert *jeder* natürlichen Zahl einmal und nur einmal vor, da ja p_s die größte Primzahl sein soll. Es ist diese Summe identisch mit dem genannten Produkt R . Aber R ist (s. o.) begrenzt. Da R andererseits als Summe S der harmonischen Reihe unbegrenzt wächst, ergibt sich ein Widerspruch. Also existiert kein solches p_s ; die Primzahlreihe ist unbegrenzt.

Wir haben den zweiten Beweis hier angeführt, nicht weil wir glaubten, der erste genüge nicht, sondern um die Genialität des zweiten darzutun; sozusagen aus Spaß am Beweisen.

Ein dritter Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlreihe wird sich im Zusammenhang mit einer interessanten Eigenschaft der Fermat-Zahlen quasi von selbst ergeben (Formel (18.2)).

Schließlich fällt, ebenfalls als Nebenprodukt, sogar noch ein vierter Beweis an, wenn die Divergenz der Reihe der Kehrwerte der Primzahlen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}$$

gezeigt wird (Kapitel 18).

Primzahl-Lücken Gehen wir die Reihe der natürlichen Zahlen n aufwärts, werden die Primzahlen darin zusehends seltener. Die Differenzen zwischen zwei aufeinander folgenden Primzahlen werden also (durchschnittlich) immer größer. So kommt die Differenz 1 (Lücke 0) nur ein einziges Mal vor ($3 - 2$); es folgt die Lücke 1 bei $5 - 3$; die Lücke 3 tritt erstmalig auf bei $11 - 7$; für die Lücke 5 müssen wir warten bis $29 - 23$ und für die Lücke 13 bis $127 - 113$. Offensichtlich kann es, von der ersten abgesehen, nur ungradzahlige Lücken geben. Es erscheinen aber die Lücken, wie die Primzahlen selbst, in höchst unregelmäßiger Sequenz; so werden die Lücken zwar im allgemeinen mit wachsendem n langsam größer, aber trotzdem kommen auch immer wieder kleine vor, wie insbesondere die Lücke 1. Dieser Lücke entsprechen die Primzahlzwillinge.

Es könnte nun eine Obergrenze für die Lücken geben. Es ist zwar eine solche im überschaubaren Zahlenbereich nicht zu entdecken, aber das besagt noch nichts; man kann ja die im unendlichen Zahlenraum sich verteilenden Primzahlen nicht in toto überblicken.

Dass es eine solche Obergrenze nicht gibt, lässt sich leicht zeigen. Wir konstruieren uns eine Lücke von $s - 1$ Zahlen in folgender Weise

$$\begin{array}{ll} p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 2 & \text{hier ist } p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7 \text{ usw.,} \\ p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 3 & \text{wie oben; } p_n = s \\ p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 4 & \\ \cdots & \\ p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + s & \end{array}$$