Höhere Mathematik
Aufgaben und Lösungen

Band 1

von

Karlheinz Spindler

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 59529

Autor:

Prof. Dr. Karlheinz Spindler studierte Mathematik, Mechanik und Geschichte an der Technischen Hochschule Darmstadt. Nach Ablegung seines Diploms und des Staatsexamens für das Lehramt an Gymnasien war er als Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der TH Darmstadt tätig und wurde dort über ein Thema aus der Strukturtheorie Liescher Algebren promoviert. Anschließend arbeitete er zunächst zwei Jahre lang als Visiting Assistant Professor an der Louisiana State University in Baton Rouge (USA) und dann fünf Jahre lang bei einem Unternehmen der Raumfahrtindustrie am European Space Operations Centre (ESOC) in Darmstadt. Im Jahr 1997 wurde er zum Professor für Mathematik und Datenverarbeitung an die Fachhochschule Wiesbaden (seit dem 1. September 2009 Hochschule RheinMain) berufen, wo er im Studiengang „Angewandte Mathematik" tätig ist. Er ist Begründer und Mitorganisator eines seit 2006 jährlich stattfindenden mathematischen Weiterbildungsseminars für Angehörige der hessischen Hochschulen für angewandte Wissenschaften.

1. Auflage 2021

Druck 5 4 3 2 1

ISBN 978-3-8085-5952-9

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, 42477 Radevormwald
Umschlagmotiv: Vom Autor erstellte Illustration und bearbeitetes Foto
Druck: CPI books GmbH, 25917 Leck

Vorwort

Das vorliegende Aufgaben- und Lösungsbuch will einen Beitrag zur Förderung der Mathematikausbildung leisten, indem es zur Beschäftigung mit mathematischen Aufgabenstellungen und zur Einübung von Problemlösungsfertigkeiten einlädt. Es ist entstanden aus Aufgabenblättern und Übungsmaterialien, die ich über viele Jahre hinweg in einer ganzen Reihe verschiedenster mathematischer Lehrveranstaltungen an der Hochschule RheinMain verwendet habe.

Wichtig war mir – sowohl beim Stellen der Aufgaben als auch beim Schreiben des Buches – eine große Bandbreite der Aufgabenstellungen. Diese reichen von einfachen Fragen zur Gewöhnung an neue Begriffe und Routineaufgaben zum Einüben und Einschleifen von Rechentechniken über anspruchsvollere Aufgaben, in denen Beispiele und Gegenbeispiele gesucht, Feinheiten von Begriffsbildungen und Aussagen ausgelotet und weiterführende Aspekte erkundet werden, bis hin zu wirklichen Herausforderungen, denen sich zu stellen einige Ausdauer erfordert. Dabei habe ich bewußt hohe Ansprüche nicht vermieden, denn (wie schon der Prediger Salomo wußte) "wo viel Weisheit ist, da ist viel Grämen, und wer viel lernt, der muß viel leiden". Ich bin aber zuversichtlich, daß durch die Aufteilung komplexer Aufgabenstellungen auf mehrere Teilaufgaben und durch die gegebenen Hinweise allzu großen Frustrationen vorgebeugt wird.

Damit das Buch auch zum Selbststudium geeignet ist, habe ich zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen erstellt, deren Formulierung vielleicht auch ein Gefühl dafür vermittelt, wie man mathematische Sachverhalte ausdrückt und zu Papier bringt. Natürlich sollte man aber vor dem Blick in die Lösung immer versuchen, die jeweilige Aufgabe selbst zu bearbeiten: Mathematik ist kein Zuschauersport, sondern eher wie Klavierspielen; man erlernt sie nur durch eigene aktive Beschäftigung. Ich hoffe, daß bei aller Konzentration auf das Lösen von Aufgaben auch etwas von der Schönheit, Klarheit und Eleganz der Mathematik deutlich wird. Von den Inhalten und vom Kapitelaufbau her richtet sich das vorliegende Buch nach dem Lehrbuch

> Karlheinz Spindler: *Höhere Mathematik – Ein Begleiter durch das Studium*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main* 2010.

Immer, wenn in den Lösungen auf "das Buch" verwiesen wird, ist dieses Lehrbuch gemeint. Die Verweise dienen in erster Linie der bequemen Referenzierung; die allermeisten Aufgaben können vollkommen unabhängig von der Verwendung eines bestimmten Lehrbuches oder Manuskriptes bearbeitet werden, und ich hoffe, daß sich geeignete Aufgaben für eine Vielzahl verschiedener Lehrveranstaltungen auswählen lassen. Da das Material des Buches in unterschiedlicher Intensität für unterschiedliche Lehrveranstaltungen entstand, war eine gewisse Unausgewogenheit zwischen den verschiedenen thematischen Bereichen (oder, positiver ausgedrückt, eine gewisse Schwerpunktsetzung) unausweichlich. Der zu erwartende eher geringe Zusatznutzen erschien es mir nicht wert, hier mit entsprechendem Zeitaufwand (und resultierenden Verzögerungen) die Unterschiede nachträglich noch auszugleichen. Um noch einmal den Prediger Salomo zu Wort kommen zu lassen: "Des vielen Büchermachens ist kein Ende, und viel Studieren macht den Leib müde".

Wie schon bei dem genannten Lehrbuch bin ich auch beim Schreiben dieses Aufgaben- und Lösungsbuchs Frau Dr. Renate Schappel zu kaum ermeßlichem Dank verpflichtet. Sie hat sich mit bewundernswerter Energie und Begeisterung, mit großer Akribie und Sorgfalt der Herkulesaufgabe angenommen, das vollständige Manuskript (teilweise in verschiedenen Versionen) kritisch zu lesen und zu kommentieren. Sie deckte eine Unzahl von Fehlern auf, und nichts war vor ihrem kritischen Blick sicher: einfache Tippfehler, Rechenfehler, falsche oder unvollständige Schlüsse, stilistisch verunglückte Formulierungen, falsche Verweise, unschöne Zeilen- oder Seitenumbrüche und vieles mehr. Ohne ihre Hilfe wäre das Erscheinen dieses Buches schlechterdings nicht denkbar. Mein Dank gilt ferner Herrn Klaus Horn vom Verlag Europa-Lehrmittel für die kompetente verlagsseitige Umsetzung des Werkes und die jederzeit angenehme Zusammenarbeit. Ihm danke ich nicht nur für die engagierte und sachkundige Unterstützung des Buchprojekts, sondern auch für den gutmütigen Humor, mit dem er meinen Sonderwünschen begegnete. Schließlich bin ich mehreren Generationen von Studenten zu Dank verpflichtet, mit denen ich über die Jahre hinweg zusammenarbeiten durfte und deren Fragen, Kommentare und Anregungen zu Verbesserungen bei zahlreichen Aufgaben und Lösungen führten.

Alle noch verbliebenen Fehler und Unstimmigkeiten gehen natürlich einzig und allein zu meinen Lasten als Autor. Autor und Verlag sind für Hinweise auf Fehler und Ungenauigkeiten sowie für konstruktive Kritik jederzeit dankbar.

A. D. 2021 Karlheinz Spindler

---

* Inzwischen Edition Harri Deutsch, Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten.

Inhaltsverzeichnis

Teil 1:
Aufgaben

A1: Mengen

Aufgabe (1.1) Es seien $A = \{1,2,3,4\}$ und $B = \{3,4,5,6\}$. Bestimme $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$.

Aufgabe (1.2) Es sei I die Menge aller Menschen, und für $i \in I$ sei A_i die Menge der Eltern von i. Was bedeuten die Bedingungen $A_i = A_j$ bzw. $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ für i und j? Bestimme $\bigcap_{i\in I} A_i$ und $\bigcup_{i\in I} A_i$!

Aufgabe (1.3) (a) Vereinfache für beliebige Mengen A und B die Ausdrücke $A \cap (A \cup B)$ und $A \cup (A \cap B)$!

(b) Vereinfache für beliebige Mengen A, B, C den Ausdruck $(A \cup B) \cap (B \cup C)$!

(c) Wie lassen sich die Ausdrücke $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ vereinfachen, wenn $A \subseteq B$ gilt?

Aufgabe (1.4) Was läßt sich über A und B sagen,
(a) wenn $A \cup B = \emptyset$ gilt?
(b) wenn $A \setminus B = A$ gilt?
(c) wenn $A \setminus B = B$ gilt?
(d) wenn $A \setminus B = B \setminus A$ gilt?

Aufgabe (1.5) Es sei X eine fest vorgegebene Menge; für $S \subseteq X$ schreiben wir $\overline{S} := X \setminus S$ für das Komplement von S bezüglich X. Vereinfache für beliebige Mengen $A, B \subseteq X$ die folgenden Ausdrücke!
(a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$
(b) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$

Aufgabe (1.6) Die folgenden Aussagen sollen durch äquivalente Teilmengenbeziehungen zwischen A und B ersetzt werden!
(a) $A \cup B = A$
(b) $A \cap B = A$
(c) $A \setminus B = \emptyset$

Aufgabe (1.7) Es seien A, B, C Mengen. Zeige, daß genau dann $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ gilt, wenn C eine Teilmenge von A ist.

Aufgabe (1.8) Es sei X eine nichtleere Menge. Zeige, daß für zwei Teilmengen $A, B \subseteq X$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) $A \subseteq B$;
(2) für jede Menge $C \subseteq X$ mit $A \cap C \neq \emptyset$ gilt auch $B \cap C \neq \emptyset$.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, daß sich der Begriff des "Enthaltenseins" und der Begriff des "Sichschneidens" oder "Überlappens" gegenseitig durcheinander ausdrücken lassen.

Aufgabe (1.9) Es seien A, B, C Teilmengen einer Menge X. Beweise die folgenden Rechenregeln!

(1) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$
(2) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
(3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(4) $A \cap (B \cup A) = A$, $A \cup (B \cap A) = A$

Die Regeln (1)-(4) nennt man der Reihe nach **Idempotenzgesetze**, **Kommutativgesetze**, **Assoziativgesetze** und **Absorptionsgesetze**; alle vier Regeln zusammen nennt man **Verbandsgesetze.** Zeige ferner, daß die beiden folgenden **Distributivgesetze** gelten:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Aufgabe (1.10) Beweise die folgenden Rechenregeln!
(a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$
(b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
(c) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \setminus (A \cap C) = A \setminus (B \cup C)$
(d) $(\bigcap_{i\in I} A_i) \setminus B = \bigcap_{i\in I} (A_i \setminus B)$
(e) $(\bigcup_{i\in I} A_i) \setminus B = \bigcup_{i\in I} (A_i \setminus B)$

Aufgabe (1.11) Welche Beziehung besteht zwischen den Mengen $(A \setminus B) \setminus C$ und $A \setminus (B \setminus C)$? Wann sind diese beiden Mengen gleich?

Aufgabe (1.12) Es sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge X. Beweise die nach Augustus de Morgan (1806-1871) benannten **Regeln von de Morgan**:

$$X \setminus (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} (X \setminus A_i), \qquad X \setminus (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} (X \setminus A_i)\,.$$

Aufgabe (1.13) Beweise die folgenden **Monotoniegesetze** für Mengenoperationen! Sind $(A_i)_{i\in I}$ und $(B_i)_{i\in I}$ Familien von Mengen mit $A_i \subseteq B_i$ für alle $i \in I$, so gelten auch die Inklusionen $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$ und $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$.

Aufgabe (1.14) Es seien A, B, C Teilmengen einer Menge X. Zeige, daß mit der Notation $\overline{U} := X \setminus U$ die folgenden Rechenregeln gelten!

(a) $\overline{\emptyset} = X$, $\overline{X} = \emptyset$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$, $A \cup \overline{A} = X$
(b) $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap X = A$, $A \cup X = X$
(c) $\overline{\overline{A}} = A$
(d) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
(e) $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup B}$
(f) Genau dann gilt $A \subseteq B$, wenn $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ gilt.
(g) $A \cap B \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap \overline{C})$
(h) $A \cup B \supseteq (A \cup C) \cap (B \cup \overline{C})$

↗ Lösungen zu »Mengen«

Aufgabe (1.15) Vereinfache für beliebige Mengen A und B die folgenden Ausdrücke!

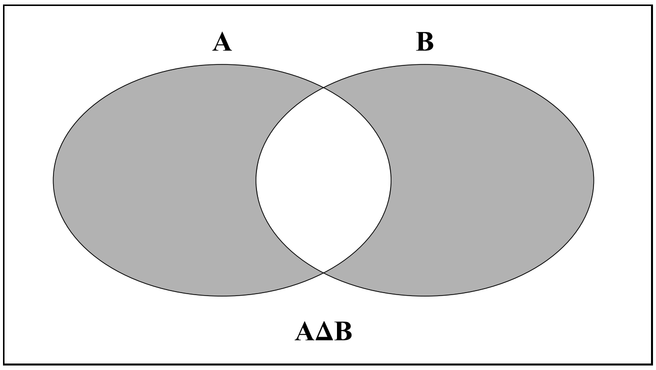
$$\begin{array}{llll} A\setminus(A\setminus B) & A\setminus(B\setminus A) & (A\setminus B)\setminus A & (B\setminus A)\setminus A \\ A\setminus(A\cap B) & A\setminus(B\cap A) & (A\setminus B)\cap A & (B\setminus A)\cap A \\ A\cap(A\setminus B) & A\cap(B\setminus A) & (A\cap B)\setminus A & (B\cap A)\setminus A \\ A\setminus(A\cup B) & A\setminus(B\cup A) & (A\setminus B)\cup A & (B\setminus A)\cup A \\ A\cup(A\setminus B) & A\cup(B\setminus A) & (A\cup B)\setminus A & (B\cup A)\setminus A \end{array}$$

Aufgabe (1.16) Zeige, daß für beliebige Mengen A, B, C die folgenden Gleichungen gelten!

$$\begin{aligned} A\setminus(B\cup C) &= (A\setminus B)\cap(A\setminus C) \\ A\setminus(B\cap C) &= (A\setminus B)\cup(A\setminus C) \\ A\cap(B\setminus C) &= (A\cap B)\setminus(A\cap C) \\ A\cup(B\setminus C) &= A\cup\big(B\setminus(A\cup C)\big) \end{aligned}$$

Aufgabe (1.17) Die **symmetrische Differenz** zweier Mengen A und B ist definiert als

$$A\Delta B \;:=\; (A\cup B)\setminus(A\cap B) \;=\; (A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$



Symmetrische Differenz zweier Mengen.

Zeige, daß für alle Mengen A, B, C die folgenden Rechenregeln gelten!

(a) $A\Delta A = \emptyset$
(b) $A\Delta\emptyset = A$
(c) $A\Delta B = B\Delta A$ (Kommutativgesetz)
(d) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ (Assoziativgesetz)
(e) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$
(f) $A\setminus B = A\Delta(A\cap B)$
(g) $A\cup B = A\Delta B\Delta(A\cap B)$
(h) Genau dann gilt $A\Delta B = \emptyset$, wenn $A = B$ ist.
(i) Aus $A\Delta C = B\Delta C$ folgt $A = B$ (Kürzungsregel).
(j) $A\Delta C \subseteq (A\Delta B)\cup(B\Delta C)$

Aufgabe (1.18) Es sei X eine fest vorgegebene Menge. Auf der Menge aller Teilmengen von X definieren wir eine Summenbildung $+$ und eine Produktbildung $\cdot$ durch die Vorschriften

$$\begin{aligned} &A+B := A\Delta B := (A\setminus B)\cup(B\setminus A) \quad \text{und} \\ &AB := A\cdot B := A\cap B. \end{aligned}$$

Ferner definieren wir das Nullelement $0 := \{\}$ und das Einselement $1 := X$. Zeige, daß dann für alle Teilmengen A, B, C von X die folgenden Rechenregeln gelten:

(a) $A+B = B+A$
(b) $(A+B)+C = A+(B+C)$
(c) $A+0 = A$
(d) $A+A = 0$
(e) $A+\overline{A} = 1$ für $\overline{A} := X\setminus A$
(f) $A\cdot B = B\cdot A$
(g) $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$
(h) $A\cdot 1 = A$
(i) $A\cdot 0 = 0$
(j) $A\cdot A = A$
(k) $A(B+C) = AB+AC$
(l) $(A+B)C = AC+BC$

Zeige ferner, daß die Gleichungen $A\setminus B = A(A+B) = A+AB$ und $A\cup B = A+B+AB$ gelten; alle Mengenoperationen lassen sich also mit Hilfe der Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ ausdrücken.

Aufgabe (1.19) Jedem Element i einer Indexmenge I sei eine weitere Indexmenge J_i zugeordnet, und es sei $K := \{(i,j) \mid i\in I, j\in J_i\}$. Zeige, daß für alle Familien von Mengen M_{ij} die folgenden Rechenregeln (die man **verallgemeinerte Assoziativgesetze** nennt) gelten:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J_i} M_{ij}\right) &= \bigcup_{(i,j)\in K} M_{ij}, \\ \bigcap_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J_i} M_{ij}\right) &= \bigcap_{(i,j)\in K} M_{ij}. \end{aligned}$$

Zeige ferner, wie sich aus diesen Regeln die in Nummer (3) von Aufgabe (1.9) angegebenen Assoziativgesetze ergeben!

Aufgabe (1.20) Es seien $(A_i)_{i\in I}$ und $(B_j)_{j\in J}$ zwei Familien von Mengen. Beweise die folgenden Rechenregeln!

(a) $\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big)\cap\big(\bigcap_{j\in J} B_j\big) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cap B_j)$
(b) $\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big)\cup\big(\bigcup_{j\in J} B_j\big) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cup B_j)$
(c) $\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big)\cup\big(\bigcap_{j\in J} B_j\big) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cup B_j)$
(d) $\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big)\cap\big(\bigcup_{j\in J} B_j\big) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cap B_j)$
(e) $\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big)\cap\big(\bigcap_{j\in J} B_j\big) = \bigcup_{i\in I}\big(\bigcap_{j\in J}(A_i\cap B_j)\big)$
(f) $\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big)\cup\big(\bigcap_{j\in J} B_j\big) = \bigcap_{j\in J}\big(\bigcup_{i\in I}(A_i\cup B_j)\big)$

Bemerkung: Gleichungen wie $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$ lassen sich als Spezialfälle dieser Rechenregeln deuten.

↗ Lösungen zu »Mengen«

Aufgabe (1.21) (a) Es sei $A = \{\{a,b\},c\}$. Bestimme die Potenzmenge $\mathfrak{P}(A)$.

(b) Es sei $A = \{a\}$ eine einelementige Menge. Bestimme $\mathfrak{P}(A)$, $\mathfrak{P}\big(\mathfrak{P}(A)\big)$ sowie $\mathfrak{P}\left(\mathfrak{P}\big(\mathfrak{P}(A)\big)\right)$.

Aufgabe (1.22) (a) Zeige: Gilt $A \subseteq B$, dann auch $\mathfrak{P}(A) \subseteq \mathfrak{P}(B)$.

(b) Zeige: Ist X eine beliebige Menge, so gelten die Gleichungen $\bigcap \mathfrak{P}(X) = \emptyset$ und $\bigcup \mathfrak{P}(X) = X$.

Aufgabe (1.23) Es sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Familie von Mengen. Beweise die folgenden Rechenregeln!

(a) $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\bigcap \mathfrak{A})$
(b) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\bigcup \mathfrak{A})$
(c) $\bigcap_{A\in\mathfrak{A}} \mathfrak{P}(A) = \mathfrak{P}(\bigcap_{A\in\mathfrak{A}} A)$
(d) $\bigcup_{A\in\mathfrak{A}} \mathfrak{P}(A) \subseteq \mathfrak{P}(\bigcup_{A\in\mathfrak{A}} A)$

Wann gilt in (b) und (d) sogar Gleichheit?

Aufgabe (1.24) Es seien $A, B \subseteq X$ und $C, D \subseteq Y$ Teilmengen fest vorgegebener Mengen X und Y. Beweise die folgenden Identitäten!

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
(b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
(c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

Aufgabe (1.25) (a) Zeige, daß $A \times B$ genau dann leer ist, wenn A oder B leer ist.

(b) Zeige, daß aus $A \subseteq \widehat{A}$ und $B \subseteq \widehat{B}$ die Bedingung $A \times B \subseteq \widehat{A} \times \widehat{B}$ folgt und daß im Falle $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ auch die Umkehrung gilt.

Aufgabe (1.26) Es seien $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge X und $(B_j)_{j\in J}$ eine Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge Y. Beweise die folgenden Gleichungen!

$$\begin{aligned} (\bigcup_{i\in I} A_i) \times (\bigcup_{j\in J} B_j) &= \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j) \\ (\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{j\in J} B_j) &= \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j) \end{aligned}$$

Verdeutliche diese Beziehungen anhand von Diagrammen!

Aufgabe (1.27) Ein geordnetes Paar (x,y) unterscheidet sich von der Menge $\{x,y\}$ dadurch, daß die Reihenfolge der beiden Elemente x und y ausgezeichnet ist. Zeige, daß man diese Unterscheidung rein mengentheoretisch auch dadurch erreichen kann, daß man (x,y) als die Menge $\big\{\{x\},\{x,y\}\big\}$ definiert. Zeige, daß diese Definition auf die folgende charakteristische Eigenschaft geordneter Paare führt: Genau dann gilt $(a,b) = (c,d)$, wenn die Bedingungen $a = c$ und $b = d$ gelten.

↗ Lösungen zu »Mengen«

A2: Klassen und Mengen

Aufgabe (2.1) (a) Es sei X eine beliebige nichtleere Menge. Jedem Element $x \in X$ werde eine Teilmenge $M_x \subseteq X$ zugeordnet. Es sei $A := \{x \in X \mid x \notin M_x\}$. Zeige, daß es kein Element $a \in X$ gibt mit $A = M_a$.

(b) In einem Dorf rasiert der Barbier genau diejenigen Einwohner, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert sich dann der Barbier selbst oder nicht?

Aufgabe (2.2) Felix Klein (1849-1925) war ein bedeutender Mathematiker, der das mathematische Leben an der Universität Göttingen maßgeblich bestimmte, im Alter aber zunehmend Projekte betrieb, die eher administrativen und didaktischen als genuin mathematischen Charakters waren. Es kursierte daher (nach Constance Reid, *Hilbert*, Springer-Verlag, 1970, S. 88/89) der folgende Witz: In Göttingen gibt es zwei Arten von Mathematikern. Die einen machen das, was sie wollen, und nicht das, was Klein will; die andern machen das, was Klein will, und nicht das, was sie wollen. Klein macht, was er will; also ist er kein Mathematiker. – Stelle den Zusammenhang zwischen diesem Witz, dem Problem des Dorfbarbiers in Aufgabe (2.1)(b) und der Russellschen Antinomie (Nr. (2.1) im Buch) bzw. ihrer Auflösung (Nr. (2.2) im Buch) her.

Aufgabe (2.3) Zeige, daß die Klasse K aller einelementigen Mengen eine Unmenge ist. (**Hinweis:** Wäre K eine Menge, was wäre dann die Potenzmenge $\mathfrak{P}(K)$?)

Aufgabe (2.4) Werden zwei Eigenschaften als gleich aufgefaßt, wenn ein Objekt genau dann die erste Eigenschaft hat, wenn es auch die zweite Eigenschaft hat, so bezeichnet man dies als **extensionale Gleichheit**. In diesem Sinne ist also die Eigenschaft eines Tieres, ein Einhorn zu sein, die gleiche wie die, ein Affe mit Flügeln zu sein. Dagegen kann man auch argumentieren, daß zwei Eigenschaften nur dann als gleich aufgefaßt werden sollen, wenn aus der Definition dieser Eigenschaften in (denk)notwendiger (kontingenter) Weise folgt, daß diese Eigenschaften bei extensionaler Betrachtungsweise zusammenfallen müssen (und nicht schon dann, wenn sich die extensionale Gleichheit sozusagen "zufällig" – akzidentiell – herausstellen sollte). Diese zweite Auffassung von Gleichheit nennt man **intensionale Gleichheit**. Finde Beispiele, in denen die Unterscheidung zwischen extensionaler und intensionaler Gleichheit eine Rolle spielt!

Aufgabe (2.5) Die Betrachtung einer für gewisse Objekte x sinnvoll formulierbaren Bedingung $B(x)$ ist äquivalent mit der Betrachtung der Klasse $\{x \mid x \text{ erfüllt } B(x)\}$. (Die Klasse ist also gewissermaßen der Umfang des durch die Bedingung definierten Begriffs.) Finde Beispiele aus dem Alltagsleben, in denen die Betrachtung der Bedingung natürlicher erscheint, und solche, in denen die Betrachtung der zugehörigen Klasse natürlicher erscheint!

↗ Lösungen zu »Klassen und Mengen«

A3: Aussagenlogik

Aufgabe (3.1) Ein **Sudoku** ist ein Rätsel, bei dem 9 Symbole (zumeist die Ziffern 1 bis 9) so in die Felder eines aus neun (3×3)-Quadraten zusammengesetztes (9×9)-Quadrat einzutragen sind, daß in jeder Spalte, in jeder Zeile und in jedem der neun (3×3)-Quadrate jedes der Symbole genau einmal vorkommt. Das Lösen von Sudokus ist eine wunderbare Übung für logisches Schließen, weil man ständig Überlegungen in Form aussagenlogischer Implikationen anstellen muß. Ergänze die Einträge in dem folgenden Diagramm zu einem Sudoku und begründe jeden neuen Eintrag!

			8	1				
		4	7					8
	5	6				2		
	9					7		
1			5	6	9			3
		2					5	
		7				1	9	
2					1	6		
				4	8			

Aufgabe (3.2) In einer Pressekonferenz äußert sich ein Fußballtrainer folgendermaßen über die mögliche Aufstellung von fünf Spielern A, B, C, D und E:

- Wenn A aufgestellt wird, dann auch B.
- Wenn C aufgestellt wird, dann auch D.
- Wenn B aufgestellt wird, so wird E nicht aufgestellt.
- Wird C aufgestellt, dann auch E.
- Wird C nicht aufgestellt, dann auch D nicht.
- Wenn D aufgestellt wird, dann auch A und C.

Welche der fünf Spieler werden aufgestellt?

Aufgabe (3.3) In einem Regal stehen vier Mathematikbücher, eines über Algebra, eines über Analysis, eines über Geometrie und eines über Logik. Die Farben der Bücher sind schwarz, weiß, braun und grau, und die folgenden Sachverhalte sind bekannt.

- Wenn das Algebrabuch nicht braun und das Analysisbuch nicht schwarz ist, so ist das Geometriebuch weiß.
- Wenn das Logikbuch nicht grau ist und das Algebrabuch nicht schwarz, dann ist das Analysisbuch weiß.
- Wenn das Geometriebuch nicht grau ist und das Logikbuch nicht braun, dann ist das Algebrabuch weiß.
- Wenn weder das Geometriebuch noch das Logikbuch schwarz ist, dann ist das Analysisbuch weiß.

Welches Buch hat welche Farbe?

Aufgabe (3.4) Adalbert sagt: "Bertram lügt." Bertram sagt: "Christoph lügt." Christoph sagt: "Adalbert und Bertram lügen." – Wer lügt, und wer sagt die Wahrheit?

Aufgabe (3.5) Kommissar Unverzagt verhört vier Tatverdächtige A, B, C und D.

A sagt: "B war es."
B sagt: "C war es."
C sagt: "B hat gelogen."
D sagt: "Ich war es nicht."

Wer beging die Tat, wenn genau eine der obigen Aussagen falsch ist? Wer beging die Tat, wenn genau eine der obigen Aussagen wahr ist?

Aufgabe (3.6) Fünf Tatverdächtige (unter ihnen der Täter) geben die folgenden Aussagen ab.

A sagt: "D war es."
B sagt: "Ich war es nicht."
C sagt: "E war es nicht."
D sagt: "Ich war es nicht."
E sagt: "B war es nicht."

Genau drei dieser fünf Aussagen sind wahr. Wer war es?

Aufgabe (3.7) In Boole City leben nur zwei Sorten von Menschen: solche, die immer lügen, und solche, die immer die Wahrheit sagen. Eines Tages befinden sich zehn Einwohner von Boole City in einem Raum, und jeder von ihnen sagt, daß die restlichen 9 allesamt Lügner seien. Wie viele Lügner befinden sich in dem Raum?

Aufgabe (3.8) Ein Gefangener sitzt in einem Gefängnis mit zwei Türen; eine führt in die Freiheit, die andere zum Galgen. Eine Tür wird von einem Wächter bewacht, der immer lügt, die andere von einem Wächter, der immer die Wahrheit sagt. Der Gefangene darf an einen der Wächter eine mit "ja" oder "nein" zu beantwortende Frage richten und nach Erhalt der Antwort wählen, durch welche der beiden Türen er seine Zelle verlassen will. Mit welcher Frage kann der Gefangene dem Galgen entgehen?

Aufgabe (3.9) (a) Wir definieren die Aussage $A \nabla B$ ("weder A noch B") als $\overline{A} \wedge \overline{B}$. Zeige, daß sich die Aussagen $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$ und $A \Rightarrow B$ allesamt unter alleiniger Benutzung des Operators ∇ ausdrücken lassen!

(b) Wir definieren die Aussage $A \mid B$ ("nicht sowohl A als auch B") als $(A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$. Zeige, daß sich die Aussagen $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$ und $A \Rightarrow B$ allesamt unter alleiniger Benutzung des Operators $\mid$ ausdrücken lassen!

↗ Lösungen zu »Aussagenlogik«

Bemerkung: Laut dieser Aufgabe genügt ein einziger Operator, um sämtliche Verknüpfungen zweier (und damit endlich vieler) Aussagen zu beschreiben. Für die Informatik bedeutet dies, daß ein einziges Schaltelement genügt, um beliebige Verknüpfungen von Aussagen rechnermäßig zu implementieren.

Aufgabe (3.10) Zeige, daß sich jede Verknüpfung zweier Aussagen allein mit Hilfe der Negation und der Konjunktion ausdrücken läßt!

Aufgabe (3.11) Es seien A, B und C beliebige Aussagen. Ersetze die folgenden Aussagen durch äquivalente, aber einfachere Aussagen! Vergleiche mit den Aufgaben (1.3) und (1.5).

(a) $A \wedge (A \vee B)$
(b) $A \vee (A \wedge B)$
(c) $(A \vee B) \wedge (B \vee C)$
(d) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \vee B)$
(e) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge B)$
(f) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge \overline{B})$
(g) $(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$
(h) $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$

Aufgabe (3.12) Es seien A, B, C beliebige Aussagen. Beweise die folgenden Rechenregeln! Vergleiche mit Aufgabe (1.9).

(1) $A \wedge A \Leftrightarrow A$, $A \vee A \Leftrightarrow A$
(2) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
(3) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$,
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
(4) $A \wedge (B \vee A) \Leftrightarrow A$, $A \vee (B \wedge A) \Leftrightarrow A$

Die Regeln (1)-(4) nennt man der Reihe nach **Idempotenzgesetze**, **Kommutativgesetze**, **Assoziativgesetze** und **Absorptionsgesetze**; alle vier Regeln zusammen nennt man **Verbandsgesetze.** Zeige ferner, daß die beiden folgenden **Distributivgesetze** gelten:

$$\begin{aligned} A \wedge (B \vee C) &\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \\ A \vee (B \wedge C) &\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C). \end{aligned}$$

Aufgabe (3.13) Es sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Aussagen. Beweise die nach Augustus de Morgan (1806-1871) benannten **Regeln von de Morgan**:

$$\overline{\bigvee_{i \in I} A_i} \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigwedge_{i \in I} A_i} \Leftrightarrow \bigvee_{i \in I} \overline{A_i}\,.$$

Vergleiche mit Aufgabe (1.12)!

Aufgabe (3.14) Es seien $(A_i)_{i \in I}$ und $(B_i)_{i \in I}$ Familien von Aussagen derart, daß für jedes $i \in I$ die Implikation $A_i \Rightarrow B_i$ wahr ist. Zeige, daß dann auch die Implikationen $(\bigwedge_{i \in I} A_i) \Rightarrow (\bigwedge_{i \in I} B_i)$ und $(\bigvee_{i \in I} A_i) \Rightarrow (\bigvee_{i \in I} B_i)$ wahr sind! Vergleiche mit Aufgabe (1.13).

Aufgabe (3.15) Es seien $(A_i)_{i \in I}$ und $(B_j)_{j \in J}$ zwei Familien von Aussagen. Beweise die folgenden Rechenregeln! Vergleiche mit Aufgabe (1.20).

(a) $\big(\bigwedge_{i \in I} A_i\big) \wedge \big(\bigwedge_{j \in J} B_j\big) \Leftrightarrow \bigwedge_{(i,j) \in I \times J} (A_i \wedge B_j)$
(b) $\big(\bigvee_{i \in I} A_i\big) \vee \big(\bigvee_{j \in J} B_j\big) \Leftrightarrow \bigvee_{(i,j) \in I \times J} (A_i \vee B_j)$
(c) $\big(\bigwedge_{i \in I} A_i\big) \vee \big(\bigwedge_{j \in J} B_j\big) \Leftrightarrow \bigwedge_{(i,j) \in I \times J} (A_i \vee B_j)$
(d) $\big(\bigvee_{i \in I} A_i\big) \wedge \big(\bigvee_{j \in J} B_j\big) \Leftrightarrow \bigvee_{(i,j) \in I \times J} (A_i \wedge B_j)$
(e) $\big(\bigvee_{i \in I} A_i\big) \wedge \big(\bigwedge_{j \in J} B_j\big) \Leftrightarrow \bigvee_{i \in I} \big(\bigwedge_{j \in J} (A_i \wedge B_j)\big)$
(f) $\big(\bigvee_{i \in I} A_i\big) \vee \big(\bigwedge_{j \in J} B_j\big) \Leftrightarrow \bigwedge_{j \in J} \big(\bigvee_{i \in I} (A_i \vee B_j)\big)$

Aufgabe (3.16) Zeige, daß es sich bei den folgenden Aussagen um Tautologien handelt! Vergleiche mit den Aufgaben (1.6) und (1.7).

(a) $(A \vee B \Leftrightarrow A) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$
(b) $(A \wedge B \Leftrightarrow A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$
(c) $\Big(\big((A \wedge B) \vee C\big) \Leftrightarrow \big(A \wedge (B \vee C)\big)\Big) \Leftrightarrow (C \Rightarrow A)$

Aufgabe (3.17) Zeige, daß die folgenden Formeln Tautologien sind! (Drücke sie jeweils in umgangssprachlicher Form aus!)

(a) $\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$ (Gesetz der doppelten Verneinung)
(b) $(A \Rightarrow \overline{A}) \Rightarrow \overline{A}$ (*reductio ad absurdum*)
(c) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ (Hinzufügen einer Voraussetzung)
(d) $\big(A \Rightarrow (A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
(Weglassen einer Voraussetzung)
(e) $\big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow \big(B \Rightarrow (A \Rightarrow C)\big)$
(Vertauschen der Voraussetzungen)
(f) $(B \Rightarrow C) \Rightarrow \big((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)\big)$
(Elimination einer Aussage)

Aufgabe (3.18) Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien?

(a) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
(b) $(\overline{B} \Rightarrow A \wedge \overline{A}) \Rightarrow B$
(c) $(A \wedge \overline{B} \Rightarrow C \wedge \overline{C}) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$
(d) $(A \sqcup B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \overline{B})$
(e) $(A \sqcup B) \Leftrightarrow \big((A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)\big)$
(f) $A \Rightarrow (\overline{A} \Rightarrow B)$
(g) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \big((\overline{A} \Rightarrow B) \Rightarrow B\big)$
(h) $(B \Leftrightarrow \overline{A}) \Leftrightarrow (B \not\Leftrightarrow A)$

Aufgabe (3.19) Zeige, daß die Implikation

$$(A \wedge B) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow B)$$

("cum hoc ergo propter hoc", d.h., "mit diesem, also deswegen") keine Tautologie (also nicht für alle Aussagen A und B richtig) ist. Es ist also falsch, aus dem gleichzeitigen Auftreten zweier Merkmale (Korrelation) schon auf einen Kausalzusammenhang zwischen diesen Merkmalen zu schließen (auch wenn dies vielfach gemacht wird!).

↗ Lösungen zu »Aussagenlogik«

Aufgabe (3.20) Ist der folgende Satz wahr oder falsch?

Dieser Satz ist falsch.

Aufgabe (3.21) Zeige, daß die drei folgenden scheinbaren Widersprüche (*Antinomien*) daher rühren, daß nicht zwischen gewöhnlichen Aussagen und Aussagen über Aussagen unterschieden wird, daß also kein Bereich von Objekten festgelegt wurde, über die man (in einer gegebenen Objektsprache) Aussagen machen kann, während man eine Sprache höherer Stufe (Metasprache) benötigt, in der man über die Aussagen der Objektsprache sprechen kann.

(a) Antinomie des Epimenides (um 600 v. Chr.): Der Kreter Epimenides behauptet: "Was ich jetzt sage, ist gelogen." Sagt er damit die Wahrheit, oder lügt er? (Vgl. dazu übrigens den Brief des Paulus an Titus, Kapitel 1, Vers 12.)

(b) Antinomie des Proklos (um 450 n.Chr.): Protagoras lehrt einen Schüler die Rechte und vereinbart mit ihm, daß dieser die Studiengebühren nach Gewinn seines ersten Prozesses zu entrichten habe. Da der Schüler nach Abschluß seiner Studien keine Prozesse übernimmt, verklagt ihn Proklos. Muß der Schüler nach der Entscheidung über diese Klage die Studiengebühren bezahlen oder nicht?

(c) Antinomie von Grelling (1908): Ein Eigenschaftswort heiße *autologisch*, wenn es die Eigenschaft hat, die es bezeichnet ("kurz", "dreisilbig", "deutsch"), andernfalls *heterologisch* ("lang", "zweisilbig", "englisch"). Ist das Adjektiv "heterologisch" heterologisch oder nicht?

Aufgabe (3.22) Ein Krokodil hat ein Kind entführt und sagt zum Vater des Kindes: "Ich werde Dir das Kind genau dann zurückgeben, wenn Du richtig rätst, ob ich das Kind zurückgeben werde." Der Vater antwortet: "Du wirst mir das Kind nicht zurückgeben." Was soll das Krokodil tun?

Aufgabe (3.23) Bilde für jede der folgenden Aussagen die Negation!

(a) Jeder Student kommt in jeder Vorlesung mindestens einmal zu spät.
(b) Mindestens ein Student kommt in jeder Vorlesung jedesmal zu spät.
(c) Alle Studenten kommen in allen Vorlesungen niemals zu spät.
(d) Jeder Student kommt in mindestens einer Vorlesung höchstens einmal zu spät.
(e) Höchstens ein Student kommt in mindestens einer Vorlesung niemals zu spät.

(Wem die Aufgabe dadurch sympathischer wird, darf in der Aufgabenstellung auch "Student" durch "Professor" ersetzen.)

Aufgabe (3.24) (a) Zeige, daß die folgende Formel eine Tautologie ist!

$$\bigvee_{x\in X}\bigwedge_{y\in Y} A(x,y) \;\Rightarrow\; \bigwedge_{y\in Y}\bigvee_{x\in X} A(x,y)$$

(b) Zeige, daß man bei der Formel in (a) den Implikationspfeil nicht durch einen Äquivalenzpfeil ersetzen darf. (Nimm etwa X als die Menge der Männer und Y als die Menge der Frauen in einer Tanzgesellschaft und $A(x,y)$ als die Aussageform "x und y haben schon mindestens einmal miteinander getanzt".)

Aufgabe (3.25) Jeder Aussageform A auf einer Menge X können wir die Menge $M(A)$ derjenigen Elemente $x \in X$ zuordnen, für die die Aussage $A(x)$ wahr ist. (Man nennt $M(A)$ die **Erfüllungsmenge** der Aussageform A.) Beweise die folgenden Rechenregeln!

(a) $M(\neg A) = X \setminus M(A)$
(b) $M(A \vee B) = M(A) \cup M(B)$
(c) $M(A \wedge B) = M(A) \cap M(B)$

Drücke auch die Mengen $M(A \sqcup B)$, $M(A \Rightarrow B)$ und $M(A \Leftrightarrow B)$ durch die Mengen $M(A)$ und $M(B)$ aus.

Aufgabe (3.26) Wir bezeichnen wie in der vorigen Aufgabe mit $M(A) \subseteq X$ die Erfüllungsmenge einer Aussageform A auf einer Menge X.

(a) Zeige, daß $\bigwedge_{x\in X} A(x)$ gleichbedeutend ist mit $M(A) = X$ und $\bigvee_{x\in X} A(x)$ mit $M(A) \neq \emptyset$.

(b) Drücke für jeden Junktor $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ die Aussagen $\bigwedge_{x\in X}\big(A(x) \circ B(x)\big)$ und $\bigvee_{x\in X}\big(A(x) \circ B(x)\big)$ mit Hilfe der Mengen $M(A)$ und $M(B)$ aus.

Aufgabe (3.27) Drücke die folgenden Aussagen jeweils durch eine der drei Bedingungen $A \subseteq B$, $A \supseteq B$ und $A = B$ aus.

(a) Für jedes $x \in X$ ist die Aussage"$x \in A$" notwendig für die Aussage "$x \in B$".
(b) Für jedes $x \in X$ ist die Aussage $x \in A$ hinreichend für die Aussage "$x \in B$".
(c) Für jedes $x \in X$ sind die Aussagen "$x \in A$" und "$x \in B$" äquivalent.

↗ Lösungen zu »Aussagenlogik«

A4: Funktionen

Aufgabe (4.1) Es sei M die Menge, die aus den Mathematikern Cauchy (1789-1857), Euler (1707-1783), Gauß (1777-1855), Hilbert (1862-1943), Jacobi (1804-1851), Kronecker (1823-1891), Lagrange (1736-1813), Newton (1642-1727) und Riemann (1826-1866) besteht, und es sei J die Menge aller Jahreszahlen. Wir definieren dann Abbildungen $f : M \to J$ und $g : M \to J$, indem wir jedem Mathematiker $x \in M$ sein Geburtsjahr $f(x)$ und sein Todesjahr $g(x)$ zuordnen.

(a) Es sei A die Menge derjenigen Mathematiker $x \in M$, deren Lebenszeit nicht ins 19. Jahrhundert hineinreicht. Bestimme die Mengen $f(A)$ und $g(A)$!

(b) Es sei $B := \{1800, 1801, \ldots, 1899\}$ das 19. Jahrhundert. Bestimme die Mengen $f^{-1}(B)$ und $g^{-1}(B)$!

Aufgabe (4.2) Wir betrachten wie in Nummer (4.4) des Buches die Menge $\mathfrak{Z}$ aller Zeichenketten über einem Alphabet $\mathfrak{A}$ sowie die folgenden Funktionen zur Textverarbeitung.

(1) Die Abbildung $f : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$ sei dadurch definiert, daß $f(w)$ aus $w \in \mathfrak{Z}$ dadurch entsteht, daß jede Hintereinanderfolge mehrerer Leerzeichen durch ein einzelnes Leerzeichen ersetzt wird. (Die Funktion f eliminiert also überflüssige Leerzeichen.)

(2) Sind $w_1 \neq w_2$ in $\mathfrak{Z}$ fest vorgegeben, so können wir die Abbildung $f_{w_1 \to w_2} : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$ dadurch definieren, daß $f_{w_1 \to w_2}(w)$ aus $w \in \mathfrak{Z}$ dadurch hervorgeht, daß wir, wo immer w_1 als Teilkette der Zeichenkette w auftritt, diese durch w_2 ersetzen. (Eine solche Abbildung kann etwa benutzt werden, um in einem Formbrief mit dem Text w den Adressatennamen von w_1 auf w_2 zu ändern.)

(3) Wir können $f : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$ dadurch definieren, daß $f(w)$ aus $w \in \mathfrak{Z}$ dadurch hervorgeht, daß immer dann, wenn auf einen Punkt und ein Leerzeichen ein Kleinbuchstabe folgt, dieser durch den entsprechenden Großbuchstaben ersetzt wird. (Diese Funktion korrigiert also fehlerhafte Kleinschreibung am Beginn eines Satzes.)

(4) Die Funktion $f : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$ sei dadurch definiert, daß $f(w)$ aus $w \in \mathfrak{Z}$ durch Umkehrung der Reihenfolge der auftretenden Zeichen entsteht; es gilt also beispielsweise $f(\texttt{MATHEMATIK}) = \texttt{KITAMEHTAM}$.

Untersuche, welche dieser Abbildungen injektiv bzw. surjektiv sind. Finde ferner die Fixpunkte dieser Funktionen. (Dabei versteht man unter einem **Fixpunkt** einer Abbildung $f : X \to X$ ein Element $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = x_0$.)

Aufgabe (4.3) Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

(a) Zeige, daß für jede Familie $(B_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von B die folgenden Regeln gelten:

$$f^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} B_i\big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \quad f^{-1}\big(\bigcap_{i\in I} B_i\big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

(b) Zeige, daß für jede Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von A die folgenden Regeln gelten:

$$f\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), \quad f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

(c) Zeige anhand eines Beispiels, daß die letzte Inklusion in (b) echt sein kann, d.h., daß nicht Gleichheit gelten muß. Zeige genauer, daß genau dann $f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ für alle Familien $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ gilt, wenn f injektiv ist.

(d) Unter welcher Bedingung für f gilt $f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ für alle Familien $\{A_i \mid i \in I\}$ mit $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$?

Aufgabe (4.4) Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Mit $A \subseteq \widehat{A}$ in X gilt auch $f(A) \subseteq f(\widehat{A})$ in Y.
(b) Mit $B \subseteq \widehat{B}$ in Y gilt auch $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\widehat{B})$ in X.
(c) Für alle $B \subseteq Y$ gilt $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.
(d) Genau dann gilt $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$ für alle $A \subseteq X$, wenn f injektiv ist.
(e) Genau dann gilt $f(X \setminus A) \supseteq Y \setminus f(A)$ für alle $A \subseteq X$, wenn f surjektiv ist.

Aufgabe (4.5) Es seien X und Y Mengen. Zeige, daß es genau dann eine injektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt, wenn es eine surjektive Abbildung $g : Y \to X$ gibt.

Aufgabe (4.6) Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Zeige, daß $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$ für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt. Zeige, daß genau dann sogar $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$ für alle $A \subseteq X$ gilt, wenn f injektiv ist.

(b) Zeige, daß $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$ für jede Teilmenge $B \subseteq Y$ gilt. Zeige, daß genau dann sogar $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ für alle $B \subseteq Y$ gilt, wenn f surjektiv ist.

Aufgabe (4.7) Wir betrachten zwei Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen!

(a) Sind f und g injektiv, dann auch $g \circ f$.
(b) Sind f und g surjektiv, dann auch $g \circ f$.
(c) Sind f und g bijektiv, dann auch $g \circ f$.
(d) Ist $g \circ f$ injektiv, dann auch f und g.
(e) Ist $g \circ f$ surjektiv, dann auch f und g.
(f) Ist $g \circ f$ bijektiv, dann auch f und g.

Lassen sich die nicht zutreffenden Behauptungen so abschwächen, daß sie richtig werden?

Aufgabe (4.8) Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen.

(a) Zeige, daß $(g \circ f)(A) = g\big(f(A)\big)$ für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt.

(b) Zeige, daß $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big)$ für jede Teilmenge $C \subseteq Z$ gilt.

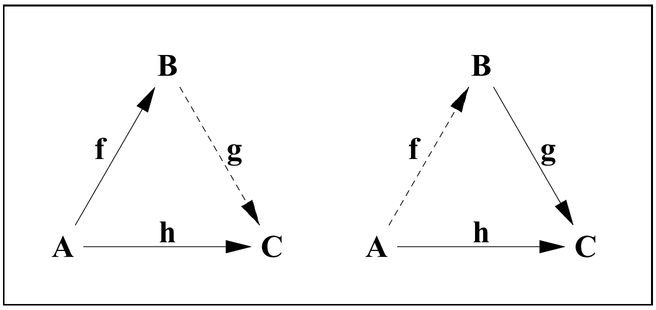
(c) Zeige, daß mit f und g auch $g \circ f$ bijektiv ist und daß in diesem Falle $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ gilt.

↗ Lösungen zu »Funktionen«

Aufgabe (4.9) Es seien A, B, C Mengen und $h : A \to C$ eine Abbildung.

(a) Gegeben sei eine Abbildung $f : A \to B$. Zeige, daß es genau dann eine Abbildung $g : B \to C$ mit $h = g \circ f$ gibt, wenn aus $f(a_1) = f(a_2)$ stets $h(a_1) = h(a_2)$ folgt.

(b) Gegeben sei eine Abbildung $g : B \to C$. Zeige, daß es genau dann eine Abbildung $f : A \to B$ mit $h = g \circ f$ gibt, wenn $h(A) \subseteq g(B)$ gilt.



Kommutative Abbildungsdiagramme.

Aufgabe (4.10) Zu jeder Abbildung $f : X \to Y$ können wir die Abbildungen

$$f_\star : \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(X) & \to & \mathfrak{P}(Y) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \qquad \text{und} \qquad f^\star : \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(Y) & \to & \mathfrak{P}(X) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B) \end{array}$$

betrachten.

- Welche Zusammenhänge bestehen zwischen der Injektivität, Surjektivität oder Bijektivität von f mit den entsprechenden Eigenschaften von $f_\star$ bzw. $f^\star$?
- Welche Zusammenhänge bestehen zwischen der Verkettung zweier Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ und den Verkettungen der Abbildungen $f_\star$ und $g_\star$ bzw. $f^\star$ und $g^\star$?

Aufgabe (4.11) Wir bezeichnen mit B^A die Menge aller Abbildungen $f : A \to B$. Da sich jede solche Abbildung als Teilmenge von $A \times B$ auffassen läßt, fassen wir B^A als Teilmenge von $\mathfrak{P}(A \times B)$ auf. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Ist A eine nichtleere Menge, so gilt $\emptyset^A = \emptyset$.
(b) Ist $B^A = \emptyset$, so gilt $B = \emptyset$, aber $A \neq \emptyset$.
(c) Ist B eine beliebige Menge, so ist $B^\emptyset = \{\emptyset\}$.
(d) Ist $A = \{a\}$, so ist $B^A = \{a\} \times B$.

Aufgabe (4.12) Es seien X eine beliebige Menge und $Z = \{u, v\}$ eine beliebige zweielementige Menge. Zeige: Definieren wir für $A \subseteq X$ die Abbildung $\chi_A : X \to Z$ durch

$$\chi_A(x) \ := \ \begin{cases} u, & \text{falls } x \in A, \\ v, & \text{falls } x \notin A, \end{cases}$$

so wird durch $A \mapsto \chi_A$ eine bijektive Abbildung $\chi : \mathfrak{P}(X) \to Z^X$ definiert.

Aufgabe (4.13) Es seien X eine Menge und $x_0 \in X$ ein fest gewähltes Element von X. Wir definieren $T : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ durch

$$T(A) \ := \ \begin{cases} A \setminus \{x_0\}, & \text{falls } x_0 \in A; \\ A \cup \{x_0\}, & \text{falls } x_0 \notin A. \end{cases}$$

Zeige, daß T eine Bijektion ist!

Aufgabe (4.14) (a) Es sei M eine beliebige Menge. Eine Abbildung $\Phi : M \to M$ heißt **involutiv**, wenn $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}_M$ gilt. Zeige, daß eine solche Abbildung automatisch eine Bijektion ist.

(b) Finde möglichst viele verschiedene Beispiele für involutive Abbildungen! (Eventuell auch unter Benutzung von Schulstoff, der im Rahmen des Buches erst nach Abschnitt 4 behandelt wird.)

(c) Läßt sich die Aussage von Teil (a) verallgemeinern?

Aufgabe (4.15) (a) Es sei M eine beliebige Menge. Eine Abbildung $\Phi : M \to M$ heißt **idempotent**, wenn $\Phi \circ \Phi = \Phi$ gilt. Zeige, daß eine solche Abbildung entweder die identische Abbildung ist oder aber nicht bijektiv sein kann.

(b) Finde möglichst viele verschiedene Beispiele für idempotente Abbildungen! (Eventuell auch unter Benutzung von Schulstoff, der im Rahmen des Buches erst nach Abschnitt 4 behandelt wird.)

Aufgabe (4.16) Es sei $\{f_i : A_i \to B_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Abbildungen zwischen nichtleeren Mengen, indiziert durch eine Indexmenge I. Als **kartesisches Produkt** dieser Abbildungen bezeichnet man die Abbildung $f = \prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} B_i$, die definiert ist durch

$$f\big((a_i)_{i \in I}\big) \ := \ \big(f_i(a_i)\big)_{i \in I}.$$

Beispielsweise ist das kartesische Produkt $f_1 \times f_2$ zweier Abbildungen $f_1 : A_1 \to B_1$ und $f_2 : A_2 \to B_2$ die Abbildung

$$f_1 \times f_2 : \begin{array}{ccc} A_1 \times A_2 & \to & B_1 \times B_2 \\ (a_1, a_2) & \mapsto & \big(f_1(a_1), f_2(a_2)\big), \end{array}$$

und das kartesische Produkt $f_1 \times f_2 \times f_3$ dreier Abbildungen $f_1 : A_1 \to B_1$, $f_2 : A_2 \to B_2$ und $f_3 : A_3 \to B_3$ ist die Abbildung

$$f_1 \times f_2 \times f_3 : \begin{array}{ccc} A_1 \times A_2 \times A_3 & \to & B_1 \times B_2 \times B_3 \\ (a_1, a_2, a_3) & \mapsto & \big(f_1(a_1), f_2(a_2), f_3(a_3)\big). \end{array}$$

(a) Zeige, daß $\prod_{i \in I} f_i$ genau dann injektiv ist, wenn jede einzelne der Abbildungen f_i injektiv ist.
(b) Zeige, daß $\prod_{i \in I} f_i$ genau dann surjektiv ist, wenn jede einzelne der Abbildungen f_i surjektiv ist.
(c) Zeige, daß $\prod_{i \in I} f_i$ genau dann bijektiv ist, wenn jede einzelne der Abbildungen f_i bijektiv ist. Wie lautet in diesem Fall die Umkehrabbildung von $\prod_{i \in I} f_i$?

↗ Lösungen zu »Funktionen«

Aufgabe (4.17) Es sei X eine beliebige Menge. Wir können die Komplementbildung als Abbildung

$$K : \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(X) & \to & \mathfrak{P}(X) \\ A & \mapsto & X \setminus A \end{array}$$

auffassen. Ebenso können wir die Vereinigungsbildung als Abbildung

$$V : \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) & \to & \mathfrak{P}(X) \\ (A, B) & \mapsto & A \cup B \end{array}$$

und die Durchschnittsbildung als Abbildung

$$D : \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) & \to & \mathfrak{P}(X) \\ (A, B) & \mapsto & A \cap B \end{array}$$

auffassen. Zeige, daß dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} K \circ V &= D \circ (K \times K) \quad \text{und} \\ K \circ D &= V \circ (K \times K) \end{aligned}$$

gelten (wobei das kartesische Produkt $K \times K$ wie in der vorhergehenden Aufgabe definiert ist).

Aufgabe (4.18) Wir betrachten eine beliebige nichtleere Menge $X \neq \emptyset$, die Menge F aller Selbstabbildungen $f : X \to X$ sowie die Menge $\mathfrak{F}$ aller Abbildungen von X nach F.

(a) Für jedes feste $x \in X$ definieren wir die Auswertungsabbildung $\widehat{x} : F \to X$ durch $\widehat{x}(f) := f(x)$. Wann ist $\widehat{x}$ injektiv bzw. surjektiv?

(b) Die Evaluationsabbildung $\mathrm{ev} : X \to \mathfrak{F}$ wird definiert durch $\mathrm{ev}(x) := \widehat{x}$. Wann ist ev injektiv bzw. surjektiv?

Aufgabe (4.19) Wir betrachten eine feste Abbildung $g : X \to Y$ und wollen die Verkettungen von g mit Abbildungen $f : A \to X$ sowie Abbildungen $f : Y \to B$ untersuchen. Wir schreiben allgemein $F(M, N)$ für die Menge aller Abbildungen $f : M \to N$ zwischen zwei Mengen M und N. Wir setzen voraus, daß A, B, X, Y nicht leer sind.

$$A \longrightarrow X \xrightarrow{g} Y \longrightarrow B$$

(a) Ist $f : A \to X$ eine Abbildung in X hinein, so können wir die Linksverknüpfung $L_g(f) := g \circ f$ betrachten. Dies definiert eine Abbildung $L_g : F(A, X) \to F(A, Y)$. Wann ist L_g injektiv bzw. surjektiv?

(b) Ist $f : Y \to B$ eine Abbildung aus Y heraus, so können wir die Rechtsverknüpfung $R_g(f) := f \circ g$ betrachten. Dies definiert eine Abbildung $R_g : F(Y, B) \to F(X, B)$. Wann ist R_g injektiv bzw. surjektiv?

(c) Nun betrachten wir speziell den Fall $X = Y = A = B$. Wann sind die Abbildungen $L_g, R_g : F(X, X) \to F(X, X)$ bijektiv?

Aufgabe (4.20) Es seien X eine nichtleere Menge und $F : X \to \{0, 1\}^X$ eine beliebige Abbildung. Da die Bilder von F selbst wieder Funktionen sind, schreiben wir zwecks psychologischer Vereinfachung F_x statt $F(x)$. Zeige, daß es dann genau eine Abbildung $f : X \to \{0, 1\}$ gibt mit $f(x) \neq F_x(x)$ für alle $x \in X$. Schließe daraus, daß F nicht surjektiv sein kann.

↗ Lösungen zu »Funktionen«

A5: Relationen

Aufgabe (5.1) Prüfe nach, welche der für Relationen eingeführten Eigenschaften jede der folgendermaßen definierten Relationen auf der jeweils angegebenen Menge A besitzt. (Diese Aufgabe setzt einige Kenntnisse aus der Schulmathematik voraus, die im systematischen Aufbau des Buches erst später behandelt werden können.)

(a) $A =$ Menge der natürlichen Zahlen,
$a \mid b :\Leftrightarrow a$ ist ein Teiler von b

(b) $A =$ Menge der natürlichen Zahlen außer der Zahl 1,
$a \sim b :\Leftrightarrow a$ ist ein echter Teiler von b

(c) $A =$ Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ einer beliebigen Menge X,
$A \subseteq B :\Leftrightarrow A$ ist Teilmenge von B

(d) $A =$ Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ einer Menge X mit genau einem Element, $A \sim B :\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$

(e) $A =$ Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ einer Menge X mit mehr als einem Element, $A \sim B :\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$

(f) $A =$ Menge der natürlichen Zahlen,
$a \leq b :\Leftrightarrow a$ ist kleiner als oder gleich b

(g) $A =$ Menge aller Geraden in einer festen Ebene,
$g \parallel h :\Leftrightarrow g$ ist parallel zu h

(h) $A =$ Menge aller Geraden in einer festen Ebene,
$g \sim h :\Leftrightarrow g \cap h \neq \emptyset$

(i) $A =$ Menge aller Geraden im Raum,
$g \sim h :\Leftrightarrow g$ ist windschief zu h

(j) $A =$ Menge der ganzen Zahlen,
$a \equiv b :\Leftrightarrow a - b$ ist durch 7 teilbar

(k) $A =$ Menge aller Pfeile im Raum,
$a \sim b :\Leftrightarrow a$ und b haben gleiche Länge und Richtung

(l) $A =$ Menge aller Dreiecke in einer Ebene,
$D_1 \sim D_2 :\Leftrightarrow D_1$ ist kongruent zu D_2

(m) $A =$ Menge aller Dreiecke in einer Ebene,
$D_1 \sim D_2 :\Leftrightarrow D_1$ ist ähnlich zu D_2

(n) $A = \mathbb{R} =$ Menge der reellen Zahlen, $r \in \mathbb{R}$ fest,
$x \sim y :\Leftrightarrow x - y$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von r

(o) $A =$ Menge aller reellen Intervalle $[a, b]$ mit $a < b$,
$I \sim J :\Leftrightarrow I \subseteq J$

(p) $A =$ Menge aller reellen Intervalle $[a, b]$ mit $a < b$,
$I \sim J :\Leftrightarrow I \cap J \neq \emptyset$

(q) $A =$ Menge aller reellen Intervalle $[a, b]$ mit $a < b$,
$I \sim J :\Leftrightarrow x \leq y$ für alle $x \in I$ und $y \in J$

(r) $A =$ Menge aller Funktionen $f : X \to Y$, $x_0 \in X$ fest,
$f \sim g :\Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$

(s) $A =$ Menge aller Funktionen $f : X \to Y$,
$f \sim g :\Leftrightarrow$ es gibt ein $x \in X$ mit $f(x) = g(x)$

(t) $A =$ Menge aller Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$,
$f \sim g :\Leftrightarrow$ die Funktion $f - g$ ist konstant

Aufgabe (5.2) Zeige, daß eine antisymmetrische Relation automatisch auch antireflexiv und identitiv ist.

Aufgabe (5.3) Kann eine Relation gleichzeitig symmetrisch und identitiv sein?

Aufgabe (5.4) Gegeben seien eine Menge X und eine Funktion $f : X \to X$. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf X durch $x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = y$. Drücke die Bedingungen, daß $\sim$ (anti)reflexiv, (anti)symmetrisch, transitiv bzw. identitiv ist, durch möglichst einfache Bedingungen für die Funktion f aus!

Aufgabe (5.5) Es seien M eine nichtleere Menge von Personen und X die Menge aller Vornamen der Personen in M. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf X dadurch, daß $x_1 \sim x_2$ genau dann gilt, wenn es eine Person in M gibt, die sowohl den Vornamen x_1 als auch den Vornamen x_2 trägt. Untersuche, ob (eventuell in Abhängigkeit von der Menge M) diese Relation (anti)reflexiv, (anti)symmetrisch, transitiv oder reflexiv ist.

Aufgabe (5.6) Es sei R eine Relation auf einer Menge X, und es sei I die Identitätsrelation auf X mit $xIy \Leftrightarrow x = y$, mengentheoretisch also $I = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) Es gilt $RI = IR = R$.
(b) R reflexiv $\Leftrightarrow I \subseteq R$
(c) R antireflexiv $\Leftrightarrow I \cap R = \emptyset$
(d) R symmetrisch $\Leftrightarrow R^{-1} \subseteq R \Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$
(e) R antisymmetrisch $\Leftrightarrow R^{-1} \cap R = \emptyset$
(f) R identitiv $\Leftrightarrow R^{-1} \cap R \subseteq I$
(g) R transitiv $\Leftrightarrow RR \subseteq R$

Aufgabe (5.7) Auf der Menge aller Menschen betrachten wir die folgenden Relationen:

(1) “ist Mutter von”;
(2) “ist Vater von”;
(3) “ist Elternteil von”;
(4) “ist Tochter von”;
(5) “ist Sohn von”;
(6) “ist Kind von”;
(7) “ist Schwester von”;
(8) “ist Bruder von”;
(9) “ist Bruder oder Schwester von”;
(10) “ist Ehefrau von”;
(11) “ist Ehemann von”;
(12) “ist verheiratet mit”.

Stelle jede der folgenden Relationen als Relationenprodukt je zweier der Relationen (1) bis (12) dar:

(a) “ist Schwiegermutter von”;
(b) “ist Schwiegervater von”;
(c) “ist Tante von”;
(d) “ist Onkel von”;
(e) “ist Großmutter von”;
(f) “ist Großvater von”;
(g) “ist Schwägerin von”;
(h) “ist Schwager von”;
(i) “ist Enkeltochter von”;
(j) “ist Enkelsohn von”;
(k) “ist Enkelkind von”.

↗ Lösungen zu »Relationen«

Aufgabe (5.8) Betrachte die Relationen $R_1, \ldots, R_{12}$, die in der vorigen Aufgabe in den Nummern (1) bis (12) angegeben wurden. Bestimme für $1 \leq i \leq 12$ die Relationen $S_i := R_i \circ R_i$!

Aufgabe (5.9) Wir betrachten Mengen A, B, C, D sowie Relationen R, R_i von A nach B, eine Relation S von B nach C sowie eine Relation T von C nach D. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) $(R^{-1})^{-1} = R$
(b) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$
(c) $(R_1 \setminus R_2)^{-1} = R_1^{-1} \setminus R_2^{-1}$
(d) $(\bigcap_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i^{-1}$
(e) $(\bigcup_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$
(f) $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$

Aufgabe (5.10) Zeige: Sind R_1, R_2 Relationen von X nach Y sowie S_1, S_2 Relationen von Y nach Z mit $R_1 \subseteq R_2$ und $S_1 \subseteq S_2$, so gilt $S_1 \circ R_1 \subseteq S_2 \circ R_2$.

Aufgabe (5.11) Es seien X, Y, Z Mengen, R eine Relation von X nach Y sowie S_1, S_2 Relationen von Y nach Z. Beweise die folgenden Aussagen!

(a) $(S_1 \cup S_2) \circ R = (S_1 \circ R) \cup (S_2 \circ R)$
(b) $(S_1 \cap S_2) \circ R \subseteq (S_1 \circ R) \cap (S_2 \circ R)$
(c) $(S_2 \setminus S_1) \circ R \supseteq (S_2 \circ R) \setminus (S_1 \circ R)$

Zeige anhand von Beispielen, daß in (b) und (c) nicht Gleichheit gelten muß!

Aufgabe (5.12) Es seien R eine Relation von A nach A' und S eine Relation von B nach B'. Als **direktes Relationenprodukt** von R und S bezeichnet man die Relation $R \times S$ von $A \times A'$ nach $B \times B'$ derart, daß genau dann (a, a') in Relation zu (b, b') steht,wenn sowohl a in Relation R zu a' als auch b in Relation S zu b'steht. (Beispiel: R bedeute "größer als", S bedeute "schwerer als"; genau dann gilt dann $(a, b)\, R \times S\, (a', b')$, wenn a größer ist als a' und b schwerer als b'. Wir nehmen nun $A = A'$ und $B = B'$ an, betrachten also nur Relationen jeweils auf einer gegebenen Menge. Beweise oder widerlege dann die folgenden Aussagen!

(a) Mit R und S ist auch $R \times S$ reflexiv.
(b) Mit R und S ist auch $R \times S$ antireflexiv.
(c) Mit R und S ist auch $R \times S$ symmetrisch.
(d) Mit R und S ist auch $R \times S$ antisymmetrisch.
(e) Mit R und S ist auch $R \times S$ transitiv.
(f) Mit R und S ist auch $R \times S$ identitiv.

Gilt jeweils auch die umgekehrte Implikation, folgt also aus der Tatsache, daß $R \times S$ die jeweils betrachtete Eigenschaft hat, schon zwangsläufig, daß R und S beide diese Eigenschaft haben müssen?

Aufgabe (5.13) In der vorigen Aufgabe wurde das direkte Produkt zweier Relationen definiert. Wie würde man das direkte Produkt einer beliebigen Familie von Relationen definieren?

Aufgabe (5.14) Es sei R eine Relation auf einer Menge X, und es sei I die Identitätsrelation auf X, die durch $(xIy :\Leftrightarrow x = y)$ definiert ist.

(a) Die Potenzen von R sind definiert durch $R^1 := R$, $R^2 := R \circ R$, $R^3 := R \circ R \circ R$, und so weiter. Die **transitive Hülle** von R ist die Vereinigung all dieser Potenzen von R. Deute die Elemente von X als Orte und die Elemente von R als Direktverbindungen zwischen diesen Orten. Gib die transitive Hülle dieser Relation an!

(b) Die **reflexive Hülle** von R ist definiert als $I \cup R$. Ist die transitive Hülle der reflexiven Hülle von R das Gleiche wie die reflexive Hülle der transitiven Hülle von R?

(c) Es sei $X = \{1, 2, 3\}$ und $R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$. Wie lauten die reflexive und die transitive Hülle von R?

Aufgabe (5.15) Gegeben sei eine Menge X. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{R}$ aller Relationen auf X, die Menge $\mathfrak{E}$ der Eigenschaften Reflexivität, Antireflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Transitivität und Identitivität von Elementen von $\mathfrak{R}$ sowie die Menge $\mathfrak{V}$ der Operationen $\cup$, $\cap$, $\setminus$ und $\circ$ zwischen Elementen von $\mathfrak{R}$. Überprüfe für alle $E \in \mathfrak{E}$ und alle $\star \in \mathfrak{V}$ die Gültigkeit der folgenden Behauptungen! (Jeweils Beweis oder Gegenbeispiel.)

(a) Hat $R \in \mathfrak{R}$ die Eigenschaft E, dann auch R^{-1}.
(b) Haben $R \in \mathfrak{R}$ und $S \in \mathfrak{R}$ die Eigenschaft E, so hat auch $S \star R$ die Eigenschaft E.

Aufgabe (5.16) Für zwei Relationen R und S auf einer Menge X schreiben wir für die Zwecke dieser Aufgabe $R \oplus S := R \cup S$ und $R \odot S := S \circ R$. Ferner definieren wir die Nullrelation $\mathbf{0}$ als die Relation, bezüglich der keine zwei Elemente von x in Relation stehen, sowie die Gleichheitsrelation $\mathbf{1}$, bezüglich der zwei Elemente $x, y \in X$ genau dann in Relation stehen, wenn sie gleich sind. Beweise die folgenden Rechenregeln!

(a) $R \oplus S = S \oplus R$
(b) $R \oplus (S \oplus T) = (R \oplus S) \oplus T$
(c) $R \oplus \mathbf{0} = R$
(d) $R \odot (S \odot T) = (R \odot S) \odot T$
(e) $R \odot \mathbf{1} = \mathbf{1} \odot R = R$
(f) $R \odot \mathbf{0} = \mathbf{0} \odot R = \mathbf{0}$
(g) $(R \oplus S) \odot T = (R \odot T) \oplus (S \odot T)$
(h) $R \odot (S \oplus T) = (R \odot S) \oplus (R \odot T)$

↗ Lösungen zu »Relationen«