



EUROPA-FACHBUCHREIHE
für Chemieberufe

Technische Mathematik und Datenauswertung für Laborberufe

Eckhard Ignatowitz, Henrik Althaus, Ernst Bartels, Holger Rapp

8. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr. 71713

Autoren in alphabetischer Reihenfolge

Dr. Henrik Althaus, OStR	Stade
Dr. Ernst Bartels, StD a. D.	Winsen/Aller
Dr. Eckhard Ignatowitz, StR a. D.	Waldbronn
Holger Rapp, Dipl.-Ing., Dipl.-Wirt.-Ing	Waldbronn

Autoren bis zur 6. Auflage:

Dr. Klaus Brink, OStR †	Leverkusen
Gew.-Lehrer Gerhard Fastert, OStR †	Stade

Leitung des Arbeitskreises und Lektorat:

Dr. Eckhard Ignatowitz

Bildentwürfe: Die Autoren

Bildbearbeitung:

Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel, Ostfildern

8. Auflage 2021

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN 978-3-8085-8383-8

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2021 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Satz: Satz+Layout Werkstatt Kluth GmbH, 50374 Erftstadt

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, Radevormwald

Umschlagfoto: © angellodeco – stock.adobe.com

Druck: Plump Druck & Medien GmbH, 53619 Rheinbreitbach

Vorwort

Das Buch **TECHNISCHE MATHEMATIK UND DATENAUSWERTUNG FÜR LABORBERUFE** ist ein Lehr- und Übungsbuch für die schulische und betriebliche Ausbildung im Bereich fachbezogener Berechnungen sowie der Labordaten- und Prozessdatenauswertung.

Dieses Lehrbuch ist geeignet für Auszubildende zum Chemielaborant/in, Lacklaborant/in und Biologiela-
borant/in. Auch in den Berufsfachschulen Chemisch-technischer Assistent/in, Biologisch-technischer As-
sistent/in, Pharmazeutisch-technischer Assistent/in und Umwelt-technischer Assistent/in, an Fachschulen
für Biotechniker, Chemotechniker und Umweltschutztechniker sowie in der Fachoberschule Technik (Fach-
richtung Chemie), der Berufsoberschule und in naturwissenschaftlich ausgerichteten Gymnasien ist es
einsetzbar.

Die Auswahl der Inhalte orientiert sich an den Rahmenlehrplänen für die Ausbildungsberufe Chemielabo-
rant/Chemielaborantin, Biologielaaborant/Biologielaaborantin und Lacklaborant/Lacklaborantin.

Dieses Buch vermittelt neben den mathematischen Grundkenntnissen die Vielfalt der berufsbezogenen
mathematischen Kenntnisse aus den Bereichen Chemie, Physik, Statistik, Reaktionskinetik, Analytik, Qua-
litätssicherung, Beschichtungsstoffe und Informatik. Es ist ein kompetenter Begleiter während der Ausbil-
dung und ein guter Vorbereiter auf die Prüfung.

Durch seinen modularen Aufbau ist das Buch uneingeschränkt für den Lernfeld-orientierten Unterricht ge-
eignet. Den Beispielen und Übungsaufgaben liegen konsequent Problemstellungen aus dem Berufsalltag
der Laborberufe zugrunde. Besonderer Wert wurde darauf gelegt, die zahlreichen Vorgänge und Geräte
durch Abbildungen zu veranschaulichen. Wichtige Gesetzmäßigkeiten und Formeln sind optisch hervor-
gehoben.

Am Ende eines Kapitels folgen zahlreiche praxisorientierte Übungsaufgaben, die zur Festigung des Erlern-
ten, zur Leistungskontrolle oder zur Prüfungsvorbereitung verwendet werden können.

Die Lösungen der Beispielaufgaben sind überwiegend mit Größengleichungen gerechnet. Wo es sinnvoll
ist, wird alternativ auch die Schlussrechnung angewendet. Dabei wird das Runden der Ergebnisse auf die
Anzahl signifikanter Ziffern oder Stellen konsequent berücksichtigt.

In einigen Kapiteln werden die Möglichkeiten zur Nutzung von Taschenrechnern mit Statistikfunktionen
sowie eines Tabellenkalkulationsprogramms bei der rechnerischen oder grafischen Auswertung von Daten
und Datenreihen vorgestellt.

Die im Rahmenlehrplan der Laborberufe geforderte Kompetenz zur Nutzung englischsprachlicher Informa-
tionsquellen wird durch die Angabe der Fachbegriffe in englischer Sprache (jeweils in Klammern hinter der
deutschen Bezeichnung) im Text sowie im Sachwortverzeichnis unterstützt.

Bei den Bestimmungsmethoden physikalischer oder chemischer Größen sind im Text oder in den tabella-
rischen Übersichten die entsprechenden DIN-Normen angegeben. Die Bezeichnung von Stoffen folgt den
Vorgaben der IUPAC, aber auch die in der Anlagen- und Laborpraxis üblichen technischen Namen werden
aufgeführt, soweit sie von der IUPAC als weiterhin erlaubt gekennzeichnet sind.

Zum Lehrbuch **Technische Mathematik und Datenauswertung für Laborberufe** gibt es ein **Lösungsbuch**
mit durchgerechneten Lösungswegen sowie methodischen Hinweisen (Europa-Nr. 71764).

In der **8. Auflage** des vorliegenden Buches wurde eine Vielzahl von Verbesserungen durchgeführt:

- Ein neues, vielfarbiges Layout wurde realisiert, das die schnelle Erfassung der Inhalte erleichtert.
- Die Aufgaben wurden durch präzise Formulierungen und Bilder anschaulicher gestaltet.

Neu aufgenommen wurden die Themen:

- Bestimmung von Abwasser-Kennwerten (Seiten 280 bis 285) und Bestimmung der Wasserhärte (Seiten
286 bis 289)
- Verdünnungsstrategien bei fotometrischen Bestimmungen (Seiten 307 bis 310)
- Moderne Analysegeräte, z. B. Biegeschwinger (Seite 444), Molare Masse (Seite 465).

Die Autoren und der Verlag freuen sich über kritisch-konstruktive Hinweise und Verbesserungsvorschläge
zum Buch. Bitte richten Sie Ihre Zuschriften per e-mail an: Lektorat@europa-lehrmittel.de

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Grundlagen, praktisches Rechnen	8	2.5	Versuchs- und Prozessdatenauswertung mit dem Computer	59
1.1	Zahlenarten	8	2.5.1	Das Tabellenkalkulationsprogramm Excel ..	59
1.2	Größen, Einheiten, Zeichen, Formeln	9	2.5.2	Auswertung von Messreihen mit Excel ..	61
1.3	Grundrechnungsarten	10	2.5.3	Diagramme zeichnen mit Excel	64
1.3.1	Addieren und Subtrahieren	10	2.5.4	Regressionsanalyse mit Excel	68
1.3.2	Multiplizieren	11			
1.3.3	Dividieren	12	3	Ausgewählte physikalische Berechnungen	74
1.4	Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke	13	3.1	Größen, Zeichen, Einheiten, Umrechnungen	74
1.5	Bruchrechnen	14	3.2	Berechnung von Längen, Flächen, Oberflächen und Volumina	79
1.5.1	Addieren und Subtrahieren von Brüchen	14	3.2.1	Längenberechnung	79
1.5.2	Multiplizieren und Dividieren von Brüchen	15	3.2.2	Umfangs- und Flächenberechnung	80
1.6	Rechnen mit Potenzen	16	3.2.3	Oberflächen- und Volumenberechnung ..	81
1.7	Rechnen mit Wurzeln	18	3.3	Berechnung von Masse, Volumen und Dichte	83
1.8	Rechnen mit Logarithmen	20	3.4	Bewegungsvorgänge	88
1.8.1	Definition des Logarithmus	20	3.5	Strömende Medien in Rohrleitungen	92
1.8.2	Berechnen dekadischer Logarithmen	21	3.6	Kräfte	94
1.8.3	Berechnen natürlicher Logarithmen	21	3.7	Arbeit	97
1.8.4	Logarithmengesetze	22	3.8	Leistung	99
1.8.5	Logarithmieren bei der pH-Wert-Berechnung	22	3.9	Energie	101
1.9	Lösen von Gleichungen	23	3.10	Wirkungsgrad	103
1.9.1	Lineare Bestimmungsgleichungen	23	3.11	Druck und Druckarten	105
1.9.2	Quadratische Bestimmungsgleichungen ..	24	3.12	Druck in Flüssigkeiten	106
1.9.3	Wurzelgleichungen	25	3.13	Auftriebskraft	109
1.9.4	Exponentialgleichungen	25	3.14	Gaskinetik	111
1.9.5	Umstellen von Großengleichungen	26	3.15	Druck in Gasen, Gasgesetze	112
1.10	Rechnen mit Winkeln und Winkelfunktionen	27	3.16	Sättigungsdampfdruck, Partialdruck	114
1.11	Berechnungen mit dem Dreisatz	28	3.17	Luftfeuchtigkeit	116
1.12	Berechnungen mit Proportionen	30	4	Stöchiometrische Berechnungen	122
1.13	Berechnungen mit Anteilen	31	4.1	Grundgesetze der Chemie	122
2	Auswertung von Messwerten und Prozessdaten	36	4.2	Aufbau der chemischen Elemente	122
2.1	Messtechnik in der Chemie	36	4.3	Symbole und Ziffern in chemischen Formeln	124
2.1.1	Grundbegriffe der Messtechnik	36	4.4	Quantitäten von Stoffportionen	125
2.1.2	Unsicherheit von Messwerten	37	4.4.1	Stoffmenge	125
2.1.3	Messgenauigkeit im Labor und Chemiebetrieb	38	4.4.2	Molare Masse	126
2.2	Rechnen mit Messwerten	42	4.4.3	Atomare Masseneinheit	127
2.2.1	Signifikante Ziffern	42	4.5	Zusammensetzung von Verbindungen und Elementen	128
2.2.2	Runden	42	4.5.1	Massenanteile von Bestandteilen in Verbindungen	128
2.2.3	Rechnen mit Messwerten ohne angegebene Unsicherheit	43	4.5.2	Masse der Bestandteile in Portionen von Verbindungen	128
2.2.4	Rechnen mit Messwerten mit angegebener Unsicherheit	44	4.5.3	Zusammensetzung von Isotopengemischen	129
2.3	Auswertung von Messwertreihen	45	4.6	Empirische Formel, Molekülformel (Teichenformel)	130
2.3.1	Statistische Kennwerte	45	4.6.1	Berechnung der empirischen Formel einer Verbindung	131
2.3.2	Absoluter und relativer Fehler	45	4.6.2	Berechnung der Molekülformel einer Verbindung	132
2.3.3	Standardabweichung	46	4.6.3	Ermittlung der Molekülformel mit der Elementaranalyse	133
2.3.4	Gauß'sche Normalverteilung	47	4.7	Berechnungen mit Gasportionen	134
2.3.5	Auswertung mit dem Taschenrechner und Computer	47	4.7.1	Gase bei Normbedingungen	134
2.4	Darstellung von Messergebnissen	49	4.7.2	Gasportionen bei beliebigen Drücken und Temperaturen	136
2.4.1	Messwerte in Wertetabellen	49	4.7.3	Bestimmung der molaren Masse aus der allgemeinen Gasgleichung	138
2.4.2	Grafische Darstellung von Messwerten ..	50			
2.4.3	Arbeiten mit Diagrammen in der Chemie	52			
2.4.4	Funktionsgraphen	54			
2.4.5	Linearisieren einer Kurve	56			
2.4.6	Verwendung grafischer Papiere	57			

4.7.4	Dichte einer Gasportion	139	6.5	Massenwirkungsgesetz für Gasgleichgewichte	214
4.8	Rechnen mit Reaktionsgleichungen	140	6.6	Verschiebung der Gleichgewichtslage	216
4.8.1	Aufbau von Reaktionsgleichungen	140	7	Rechnen mit Ionengleichgewichten	220
4.8.2	Aufstellen von Reaktionsgleichungen	142	7.1	Protolysegleichgewichte	220
4.8.3	Oxidationszahlen	145	7.1.1	Protolysegleichgewicht des Wassers	220
4.8.4	Aufstellen von Redox-Gleichungen	147	7.1.2	pH-Wert	221
4.9	Umsatzberechnung bei chemischen Reaktionen	151	7.1.3	pH-Wert starker Säuren und Basen	223
4.9.1	Umsatzberechnung bei Einsatz reiner Stoffe	151	7.1.4	Dissoziationsgrad α , Protolysegrad	224
4.9.2	Umsatzberechnung bei Einsatz verunreinigter oder gelöster Stoffe	153	7.1.5	Berechnung des pH-Werts aus der Säure- und Basenkonstante	225
4.9.3	Umsatzberechnung bei Gasreaktionen	157	7.1.6	pH-Wert schwacher Säuren und Basen	227
4.9.4	Umsatzberechnung unter Berücksichtigung der Ausbeute	159	7.1.7	pH-Wert mehrprotoniger Säuren	228
4.10	Kernreaktionen	166	7.1.8	Das Ostwald'sche Verdünnungsgesetz	229
5	Rechnen mit Gehaltsgrößen von Mischungen	168	7.1.9	pH-Wert von Pufferlösungen	230
5.1	Gehaltsgrößen von Mischungen	168	7.1.10	Lage von Protolysegleichgewichten	232
5.1.1	Massenanteil w	170	7.2	Löslichkeitsgleichgewichte	233
5.1.2	Volumenanteil φ	172	8	Analytische Bestimmungen	237
5.1.3	Stoffmengenanteil χ	173	8.1	Thermogravimetrische Analysen	238
5.1.4	Umrechnen der verschiedenen Anteile	175	8.1.1	Feuchtigkeits- und Trockengehaltsbestimmungen von Feststoffen	238
5.1.5	Massenkonzentration β	177	8.1.2	Bestimmung des Wassergehalts in Ölen	239
5.1.6	Volumenkonzentration σ	178	8.1.3	Glührückstandsbestimmungen	240
5.1.7	Stoffmengenkonzentration c und Äquivalentkonzentration $c(1/z \cdot X)$	179	8.1.4	Thermogravimetrie	241
5.1.8	Umrechnen der verschiedenen Konzentrationen	181	8.1.5	Gravimetrische Fällungsanalysen	243
5.1.9	Löslichkeit L^*	183	8.2	Volumetrische Bestimmungen (Maßanalyse)	246
5.2	Umrechnen von Anteilen – Konzentrationen – Löslichkeiten	185	8.2.1	Durchführung einer Maßanalyse	246
5.2.1	Umrechnung Massenanteil $w(X) \Leftrightarrow$ Stoffmengenkonzentration $c(X)$	185	8.2.2	Maßanalyse mit aliquoten Teilen	246
5.2.2	Umrechnung Massenanteil $w(X) \Leftrightarrow$ Massenkonzentration $\beta(X)$	186	8.2.3	Gehaltsangaben von Maßlösungen	247
5.2.3	Umrechnung: Massenanteil $w(X) \Leftrightarrow$ Volumenkonzentration $\sigma(X)$	186	8.2.4	Herstellen von Maßlösungen	249
5.2.4	Umrechnung: Massenanteil $w(X) \Leftrightarrow$ Löslichkeit $L^*(X)$	187	8.2.5	Titer von Maßlösungen	250
5.3	Gehaltsgrößen beim Mischen, Verdünnen und Konzentrieren von Lösungen	189	8.2.6	Einstellen einer Maßlösung	251
5.3.1	Mischen von Lösungen	189	8.2.7	Neutralisationstitrationen	252
5.3.2	Verdünnen von Lösungen	191	8.2.8	Bestimmung des Titers von Maßlösungen	256
5.3.3	Volumenberechnung beim Mischen von Lösungen	192	8.2.9	Rücktitrationen	258
5.3.4	Konzentrieren von Lösungen	193	8.2.10	Mehrstufige Neutralisationstitrationen	260
6	Berechnungen zum Verlauf chemischer Reaktionen	197	8.2.11	Indirekte Titration – Mehrfachbestimmung	261
6.1	Reaktionsgeschwindigkeit	197	8.2.12	Oleum-Bestimmungen	262
6.2	Beeinflussung der Reaktionsgeschwindigkeit	200	8.2.13	Redox-Titrationen (Oxidimetrie)	264
6.2.1	Einfluss der Konzentration auf die Reaktionsgeschwindigkeit	200	8.2.14	Fällungstitrationen	270
6.2.2	Grafische Ermittlung der Reaktionsordnung	204	8.2.15	Komplexometrische Titrationen	271
6.2.3	Einfluss der Temperatur auf die Reaktionsgeschwindigkeit	207	8.3	Maßanalytische Bestimmungen mit elektrochemischen Methoden	275
6.2.4	Einfluss von Katalysatoren auf die Reaktionsgeschwindigkeit	210	8.3.1	Potentiometrische Neutralisationstitrationen	275
6.3	Chemisches Gleichgewicht	211	8.3.2	Leitfähigkeitstitrationen (Konduktometrie)	278
6.4	Massenwirkungsgesetz	212	8.4	Bestimmung von Abwasserkenwerten	280
			8.4.1	Biochemischer Sauerstoffbedarf BSB	280
			8.4.2	Chemischer Sauerstoffbedarf CSB	284
			8.5	Bestimmung der Wasserhärte	286
			8.5.1	Definition und Berechnung der Wasserhärte	286
			8.5.2	Bestimmung der Wasserhärte durch komplexometrische Titration	287
			8.5.3	Bestimmung der Härtebereiche mit Teststreifen	289
			8.6	Bestimmung maßanalytischer Kennzahlen organischer Stoffe	290
			8.6.1	Säurezahl SZ	290
			8.6.2	Verseifungszahl VZ	291

8.6.3	Esterzahl EZ	293	11	Berechnungen zur Elektrotechnik	377
8.6.4	Hydroxylzahl OHZ	293	11.1	Grundbegriffe der Elektrotechnik	377
8.6.5	Iodzahl IZ	295	11.2	Elektrischer Widerstand und Leitwert eines Leiters	379
8.7	Optische Analyseverfahren	298	11.3	Ohm'sches Gesetz	381
8.7.1	UV/VIS-Spektroskopie	298	11.4	Reihenschaltung von Widerständen	382
8.7.2	Refraktometrie	311	11.5	Parallelschaltung von Widerständen	384
8.7.3	Polarimetrie	314	11.6	Gruppenschaltungen, Netzwerkschaltungen	386
8.8	Chromatografie	316	11.7	Wheatstone'sche Brückenschaltung	388
8.8.1	Dünnschichtchromatografie und Papierchromatografie	316	11.8	Thermische Widerstandsänderung, Widerstandsthermometer	389
8.8.2	Säulenchromatografie	317	11.9	Thermospannung, Thermoelement	390
8.8.3	Kenngrößen der Chromatografie	319	11.10	Widerstandsänderung eines Leiters durch Dehnung	392
8.8.4	Trennwirkung einer chromatografischen Säule	320	11.11	Elektrische Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad	393
8.8.5	Detektorempfindlichkeit – Responsefaktor	322	11.12	Leistungsschilder elektrischer Geräte (rating plates)	395
8.8.6	Auswertung Säulenchromatografischer Analysen – Kalibriermethoden	323	11.13	Elektrische Leistung bei verschiedenen Stromarten	395
9	Statistische Methoden in Biologie und analytischer Chemie	334	12	Elektrochemische Berechnungen	399
9.1	Datengewinnung	334	12.1	Elektrolytische Stoffabscheidung	399
9.2	Kennwerte zur Charakterisierung von Datenreihen	334	12.2	Leitfähigkeit von Elektrolyten	402
9.2.1	Kennwerte zur Charakterisierung der mittleren Lage von Daten	335	12.2.1	Spezifische Elektrolyt-Leitfähigkeit	402
9.2.2	Kennwerte zur Charakterisierung der Streuung von Stichprobenwerten	337	12.2.2	Konzentrations-spezifische Leitfähigkeits-Kennwerte	403
9.3	Korrelation von Datenreihen	339	12.3	Elektrochemische Potenziale	406
9.4	Regressionsanalyse von Datenreihen	340	12.3.1	Halbzellenpotenziale (half-element potential)	406
9.5	Statistische Prüfverfahren (Signifikanztests)	341	12.3.2	Bezugselektroden	407
9.5.1	Prüfung zweier arithmetischer Mittelwerte: <i>t</i> -Test (Student-Test, Sollwert <i>t</i> -Test)	342	12.3.3	Galvanische Zellen (galvanic cell)	408
9.5.2	Prüfung zweier Varianzen: <i>F</i> -Test (Fisher-Test)	343	12.3.4	Konzentrationszelle (concentration cell)	409
9.5.3	Der χ^2 -Test (χ^2 -Test)	344	12.3.5	Nernst'sche Gleichung (Nernst equation)	409
10	Qualitätssicherung in der Chemie	348	12.3.6	Homogene Redoxsysteme (homogeneous redox-systems)	410
10.1	Validierung analytischer Verfahren	348	12.3.7	pH-abhängige Redoxsysteme (pH-dependent systems)	410
10.1.1	Richtigkeit und Präzision von Messwerten	348	12.3.8	Bestimmung des Löslichkeitsprodukts	411
10.1.2	Untersuchung der Richtigkeit von Messwerten	349	13	Berechnungen zur Wärmelehre	413
10.1.3	Untersuchung der Präzision von Messwerten	354	13.1	Temperaturskalen	413
10.2	Qualitätssicherung in der Produktionsüberwachung	363	13.2	Verhalten der Stoffe bei Erwärmung	414
10.2.1	Erfassung der Verteilung von Messwerten	363	13.2.1	Thermische Längenänderung von Feststoffen	414
10.3	Qualitätsregelkarten in der Produktionsüberwachung	365	13.2.2	Thermische Volumenänderung von Feststoffen	415
10.3.1	Aufbau und Funktion von Qualitätsregelkarten QRK	365	13.2.3	Thermische Volumenänderung von Flüssigkeiten	416
10.3.2	Berechnen der Regelgrenzen bei Lage-Qualitätsregelkarten	367	13.2.4	Thermische Volumenänderung von Gasen	418
10.3.3	Interpretation von Lage-Qualitätsregelkarten	369	13.3	Wärmeinhalt von Stoffportionen	419
10.3.4	Regelgrenzen in Streuungs-Qualitätsregelkarten	371	13.4	Aggregatzustandsänderungen	421
10.3.5	Bewertung von Streuungs-Qualitätsregelkarten	372	13.4.1	Schmelzen und Erstarren	421
10.3.6	Erstellen und Führen von Qualitätsregelkarten	373	13.4.2	Verdampfen, Kondensieren	422
10.4	Qualitätsregelkarten für das analytische Labor	374	13.4.3	Zusammengesetzte thermische Vorgänge	422
10.4.1	Blindwert-Regelkarte	374	13.5	Temperaturänderung beim Mischen von Flüssigkeiten	423
10.4.2	Wiederfindungsraten-Qualitätsregelkarte	375	13.6	Kalorimetrie (calorimetry)	425
			13.7	Temperaturänderung beim direkten Heizen und Kühlen	426
			13.8	Reaktionswärmen bei chemischen Reaktionen	428
			13.9	Heizwert und Brennwert von Brennstoffen	432

13.10	Neutralisationsenthalpie	434	15.2	Wasserdampfdestillation	484
13.11	Lösungsenthalpie	434	15.3	Rektifikation (Gegenstrom-Destillation) ..	486
13.12	Reaktionsenthalpie, Entropie, freie Reaktionsenthalpie	435	15.3.1	Vorgänge in der Rektifikationskolonne ...	486
14	Bestimmung von Produkteigenschaften	440	15.3.2	Bestimmung der erforderlichen Trennstufen	487
14.1	Bestimmung der Dichte	440	15.3.3	Rektifikation mit Füllkörperkolonnen (packed column)	488
14.1.1	Dichtebestimmung mit dem Pyknometer	441	15.4	Flüssig-Flüssig-Extraktion (Solvent- Extraktion)	490
14.1.2	Dichtebestimmung mit Biegeschwinger- Messgeräten	444	16	Berechnungen mit Beschichtungsstoffen	493
14.1.3	Dichtemessung mit dem Aräometer	446	16.1	Gehaltsgrößen von Beschichtungsstoffen	493
14.1.4	Dichtebestimmung mit der hydrostatischen Waage	447	16.1.1	Massenanteile in Beschichtungsstoffen ..	494
14.1.5	Dichtemessung mit der Westphal'schen Waage	448	16.1.2	Pigment-Volumenkonzentration PVK in Beschichtungsstoffen	496
14.2	Bestimmung technischer Dichten von Schüttgütern	449	16.1.3	Pigment-Bindemittel-Massenverhältnis ..	497
14.2.1	Bestimmung der Schütt- und Rütteldichte	449	16.1.4	Umrechnung von Rezepturen	498
14.2.2	Bestimmung der Pressdichte	449	16.2	Bestimmung der Kenngrößen von Beschichtungen	500
14.3	Bestimmung der Viskosität	451	16.2.1	Experimentell bestimmte Größen	500
14.3.1	Dynamische und kinematische Viskosität	451	16.2.2	Berechnete Größen	501
14.3.2	Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler	452	16.3	Schichtdicke von Beschichtungen	503
14.3.3	Auslauf-Viskosimeter	453	16.4	Verbrauch und Ergiebigkeit von Beschichtungsstoffen	506
14.3.4	Rotations-Viskosimeter	454	16.5	Maßanalytische Kennzahlen von Beschichtungsstoffen	510
14.4	Bestimmung der Oberflächenspannung ..	455	16.5.1	Aminzahl, H-aktiv-Äquivalentmasse	510
14.4.1	Bügelverfahren oder Ringverfahren	456	16.5.2	Isocyanatmassenanteil, Isocyanat- Äquivalentmasse	512
14.4.2	Tropfenmethode	456	16.5.3	Hydroxylzahl, Hydroxyl-Äquivalentmasse	512
14.4.3	Kapillarmethode	457	16.5.4	Epoxid-Äquivalentmasse, Epoxidwert ...	514
14.5	Bestimmung der molaren Masse	458	16.6	Mischen von Zweikomponenten-Lacken (2-K – Lacke)	515
14.5.1	Molare Masse aus den Gasgesetzen	458	16.6.1	2-Komponenten-Lacke mit Hydroxylgruppen und Isocyanatgruppen	515
14.5.2	Molare Masse aus der Dampfdruckerniedrigung	460	16.6.2	2-Komponenten-Lacke mit Epoxid- Gruppen und aktivem Wasserstoff	516
14.5.3	Molare Masse aus der Siedepunkterhöhung	461	17	Anhang	518
14.5.4	Molare Masse aus der Gefrierpunkterniedrigung	463	Griechisches Alphabet	518	
14.5.5	Moderne Geräte zur Bestimmung der Gefrierpunkttemperatur und molaren Masse ..	465	Physikalische Konstanten	518	
14.5.6	Molare Masse aus dem osmotischen Druck	467	Tabelle: Korrelationskoeffizient	519	
14.6	Bestimmung der Partikelgrößenverteilung von Schüttgütern	469	Tabelle: <i>t</i> -Verteilung	520	
14.6.1	Auswertung einer Siebanalyse	469	Tabelle: <i>F</i> -Verteilung	521	
14.6.2	Darstellung und Auswertung einer Siebanalyse im RRSB-Netz	471	Tabelle: χ^2 -Verteilung	524	
14.6.3	Bestimmung der spezifischen Oberfläche von Schüttgütern	473	Kopiervorlage: Wahrscheinlichkeitsnetz	525	
14.7	Auswertung einer Siebanalyse mit dem Tabellenkalkulationsprogramm Excel ...	474	Tabelle: Tabellenwerte zur Prüfung auf Normalverteilung mit dem David-Hartley- Pearson-Test	526	
14.7.1	Rechnerische Auswertung der Siebanalyse mit Excel	474	Tabelle: Tabellenwerte zum Ausreißertest nach Grubbs	527	
14.7.2	Erstellen von Diagrammen zur Siebanalyse mit Excel	475	Tabelle: Tabellenwerte zum Ausreißertest nach Dixon	528	
15	Trennen von Flüssigkeitsgemischen ..	477	Tabelle: Umrechnungsformeln für Gehaltsgrößen	529	
15.1	Destillieren	477	Kopiervorlage: Millimeterpapier	530	
15.1.1	Dampfdruck von Flüssigkeiten	477	Kopiervorlage: Einfach-Logarithmenpapier	531	
15.1.2	Siedeverhalten homogener Flüssigkeitsgemische	477	Kopiervorlage: Doppelt-Logarithmenpapier	532	
15.1.3	Siedediagramm	480	Kopiervorlage: Vordruck zur Datenerfassung einer Siebanalyse	533	
15.1.4	Gleichgewichtsdiagramm	480	Kopiervorlage: Histogramm	533	
15.1.5	Durchführen einer einfachen Destillation	481	Kopiervorlage: RRSB-Netz für die Siebanalyse ...	534	
15.1.6	Fraktionierte Destillation (fractional destillation)	482	Kopiervorlage: Qualitätsregelkarte	535	
			Sachwortverzeichnis	536	

1 Mathematische Grundlagen, praktisches Rechnen

1

Basis des Rechnens in der Chemie sind die grundlegenden mathematischen Rechnungsarten sowie deren praktische Anwendung mit dem Taschenrechner oder dem Computer.

1.1 Zahlenarten

Beim Rechnen unterscheidet man die **bestimmten Zahlen** sowie die **allgemeinen Zahlen**.

Während die bestimmten Zahlen einen festen Wert haben, wie z.B. 3, 9, 5, $\frac{1}{2}$ usw., stehen die allgemeinen Zahlen, wie z.B. x , y , z , als Platzhalter für beliebige Zahlen.

Bestimmte Zahlen

Die bestimmten Zahlen kann man weiter in verschiedene Zahlenarten untergliedern.

Zahlenarten der bestimmten rationalen Zahlen	Beispiele
Natürliche Zahlen: Sie sind die zum Zählen benutzten Zahlen. Es sind positive ganze Zahlen sowie Null (0). Sie werden normalerweise ohne Pluszeichen (+) geschrieben.	0, 1, 2, 3, 4, ..., 10, 11, 12, ..., 37, ..., 59, 60, 61, ..., 107, ...
Die negativen ganzen Zahlen erhält man durch Subtrahieren einer größeren natürlichen Zahl von einer kleineren natürlichen Zahl. Beispiel: $5 - 7 = -2$; $15 - 29 = -14$	-1, -2, -3, ..., -18, -19, ...
Die ganzen Zahlen umfassen die natürlichen Zahlen (positive ganze Zahlen) und die negativen ganzen Zahlen.	0, 1, 2, 3, 4, ..., 71, 72, 73, ... -1, -2, -3, -4, ..., -21, -22, ...
Gebrochene Zahlen , auch Bruchzahlen genannt, sind Quotienten aus zwei ganzen Zahlen. Quotient ist der Name für einen Bruch, d. h. eine nicht ausgeführte Divisionsaufgabe ganzer Zahlen. Bruchzahlen können positiv und negativ sein.	$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, $1\frac{1}{6}$, $\frac{7}{9}$, ... $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $-2\frac{1}{3}$, $-\frac{7}{9}$, ...
Dezimalzahlen sind Zahlen mit einem Komma. Es können positive und negative Dezimalzahlen sein.	1,748, 0,250, -8,32, -2,0, -0,5, -7,8316, 4,57, 7,8

Die bislang genannten Zahlen bezeichnet man insgesamt als **rationale Zahlen**. Außerdem gibt es die Gruppe der **irrationalen Zahlen**. Es sind bestimmte Zahlen.

Zahlenarten der bestimmten irrationalen Zahlen	Beispiele
Wurzelzahlen	$\sqrt{2} = 1,4142136\dots$; $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$
Transzendente Zahlen	$\pi = 3,1415927\dots$; $e = 2,7182818\dots$

Die irrationalen Zahlen sind nicht periodische Dezimalzahlen mit unendlich vielen Stellen.

Zahlenstrahl

Die bestimmten Zahlen lassen sich außer durch Ziffern (siehe Beispiele oben) auch zeichnerisch auf einem Zahlenstrahl als Strecke darstellen (**Bild 1**). Vom Nullpunkt aus nach rechts liegen die positiven Zahlen, nach links die negativen Zahlen.

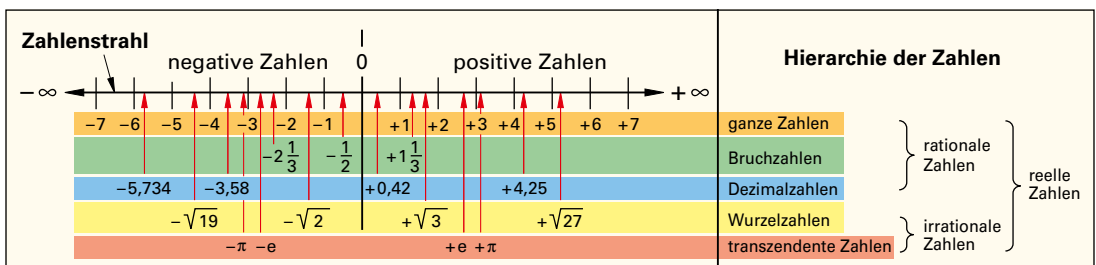


Bild 1: Zahlenarten und ihre Lage auf dem Zahlenstrahl, Hierarchie der Zahlen

Allgemeine Zahlen

Die allgemeinen Zahlen, auch Variable genannt, stehen als Platzhalter für eine beliebige Zahl.

In der Mathematik werden für die allgemeinen Zahlen die kleinen Buchstaben des Alphabets verwendet.

Beispiele

a, b, c, \dots u, v, w, \dots x, y, z

In der technischen Mathematik benutzt man kleine oder große Buchstaben zur Benennung einer Variablen. Sie sind meist der Anfangsbuchstabe des deutschen oder englischen Namens der Variablen, wie z.B. l für Länge oder V für das Volumen.

l, b, t, v, \dots A, V, U, T, \dots
 l Länge, b Breite, t Zeit (time), h Höhe,
 A Fläche (aerea), V Volumen, U Umfang,
 T thermodynamische Temperatur, ...

Aufgaben zu Zahlenarten

- Zu welcher Zahlenart gehören folgende Zahlen:
 $0,7, -18, \sqrt{3}, 1/7, 0, -387, -\pi, -0,32$?
- Wo liegen auf dem Zahlenstrahl die Zahlen:
 $-3\frac{1}{3}, 0,85, e, -0,25, \sqrt{9}, \frac{2}{4}, -3,50$?
 Zeichnen Sie die Zahlen in den Zahlenstrahl ein.

1.2 Größen, Einheiten, Zeichen, Formeln

In chemischen Berechnungen wird meist mit Größen und Einheiten gerechnet, die mit mathematischen Zeichen in Formeln verknüpft sind.

Größen, Einheiten

Mit einer Größe (engl. physical quantity) werden chemische oder physikalische Eigenschaften beschrieben. Zu ihrer Kurzschreibweise benutzt man ein Größenzeichen, z.B. l für die Länge.

Der Wert einer Größe besteht aus einem Zahlenwert und einem Einheitenzeichen, z.B. 5,8 kg. Das Einheitenzeichen ist eine Kurzform des Einheitennamens, z.B. kg für Kilogramm.

Beispiel: Die Länge einer 3,40 Meter langen Rohrleitung beträgt: $l = 3,40 \text{ m}$.

Es gibt 7 **Basisgrößen**, auf die sich alle Größen zurückführen lassen (**Tabelle 1**).

Mathematische Zeichen

Die mathematischen Zeichen (engl. mathematical symbols) dienen zur Kurzbezeichnung einer mathematischen Operation (**Tabelle 2**).

Beispiel: Sollen zwei Zahlen multipliziert werden, so setzt man zwischen die Zahlen einen Multiplikationspunkt, z.B. $3 \cdot 5$.

Für Flächenformate und räumliche Abmessungen ist auch das Multiplikationskreuz \times zugelassen.

Beispiel: $3 \text{ m} \times 5 \text{ m}$

Formeln, Größengleichungen

Die gesetzmäßigen Zusammenhänge zwischen Größen werden durch Größengleichungen (engl. equations) oder Formeln (engl. formula) ausgedrückt. Mithilfe von Größengleichungen lassen sich durch Umstellen und Auflösen die gesuchten Größen berechnen (Seite 23).

Tabelle 1: Basisgrößen und ihre Einheiten (nach SI)

Physikalische Größen	Größenzeichen	Einheitenname	Einheitenzeichen
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Stoffmenge	n	Mol	mol
Zeit	t	Sekunde	s
Thermodynamische Temperatur	T	Kelvin	K
Stromstärke	I	Ampere	A
Lichtstärke	I_v	Candela	cd

Tabelle 2: Mathematische Zeichen (DIN 1302)

Zeichen	Bedeutung	Zeichen	Bedeutung
$+, -$	plus, minus	$<, >$	kleiner, größer
$:, -, /$	geteilt durch, pro	\leq \geq	kleiner gleich, größer gleich
\cdot, \times	mal	Δ	Differenz
$=, \neq$	ist gleich, ist ungleich	\dots	und so weiter
\approx	beträgt rund	∞	unendlich
\equiv	identisch gleich	\pm	plus/minus
\sim	proportional	$ a $	Betrag von a
$\hat{=}$	entspricht	$\sqrt{\quad}$	Wurzel

Beispiel für Größengleichungen:

Fläche $A = l \cdot b$ Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$
 Volumen $V = l \cdot b \cdot h$ Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$

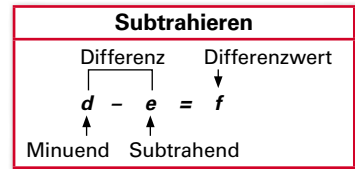
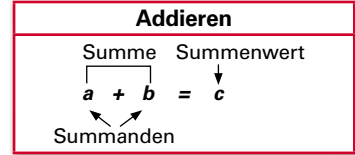
1.3 Grundrechnungsarten

1.3.1 Addieren und Subtrahieren

Diese beiden Rechnungsarten werden wegen ihrer aus Strichen bestehenden mathematischen Zeichen (+, -) auch als Strichrechnungen bezeichnet.

Beim **Addieren** (Zusammenzählen, engl. to add) werden die einzelnen Summanden zusammengezählt. Das Ergebnis heißt Summenwert oder kurz Summe.

Beim **Subtrahieren** (Abziehen, engl. to subtract) zieht man von einer Zahl eine andere Zahl ab. Das Ergebnis ist der Differenzwert, einfach auch Differenz genannt.



Rechenregeln und Klammern beim Addieren und Subtrahieren

Rechenregeln	Beispiele
Nur gleichartige allgemeine Zahlen bzw. Größen können addiert bzw. subtrahiert werden.	$8 \text{ m}^2 + 72 \text{ cm}^2 + 7,5 \text{ m}^2 - 23 \text{ cm}^2 = 15,5 \text{ m}^2 + 49 \text{ cm}^2$
Die einzelnen Glieder in einer Strichrechnung können vertauscht werden (Kommutativgesetz).	$5 - 16 + 7 = -16 + 7 + 5 = -4$; $11x - 3x + 9x = 11x + 9x - 3x = 17x$
Einzelne Glieder können zu Teilsummen bzw. Teildifferenzen zusammengefasst werden (Assoziativgesetz).	$2 + 5 - 2 - 1 = 7 - 3 = 4$; $8u - 3v + 3u + 8v = 11u + 5v$

Klammern beim Addieren und Subtrahieren

Klammern, () oder [], fassen Teilsummen bzw. Teildifferenzen zusammen. Das Vorzeichen der Glieder in der Klammer kann sich durch das Setzen oder Weglassen von Klammern ändern.	
Steht ein + Zeichen vor einer Klammer, so kann man sie weglassen, ohne dass sich die Vorzeichen der Glieder in der Klammer ändern.	$25 + (5 - 3) = 25 + 5 - 3 = 27$; $7a + (3a - 9a) = 7a + 3a - 9a = 1a = a$
Steht ein - Zeichen vor einer Klammer, so muss man beim Weglassen der Klammer das Vorzeichen aller Glieder in der Klammer umkehren. Setzt man eine Klammer, vor der ein - Zeichen steht, so muss man ebenfalls das Vorzeichen aller Glieder, die in der Klammer stehen, umkehren.	$16 - (3 - 2 + 8 - 5) = 16 - 3 + 2 - 8 + 5 = 12$; $5x - (2x + 9a - 7b) = 5x - 2x - 9a + 7b$

Aufgaben zum Addieren und Subtrahieren

- Ermitteln Sie das Ergebnis:
 $59,30 a - 27,53 a + 7,83 b - 21,04 b$
- Klammern Sie aus:
 $8,3x - 7,8a + 2,5x - 9,2a$
- Lassen Sie die Klammer weg und berechnen Sie das Ergebnis:
 $25a - (36b - 19a - 11b - 12a)$
- Ermitteln Sie die Maße l_1, l_2, l_{ges} der Rohrleitung in **Bild 1**. Die Maße in der Zeichnung sind in mm angegeben.

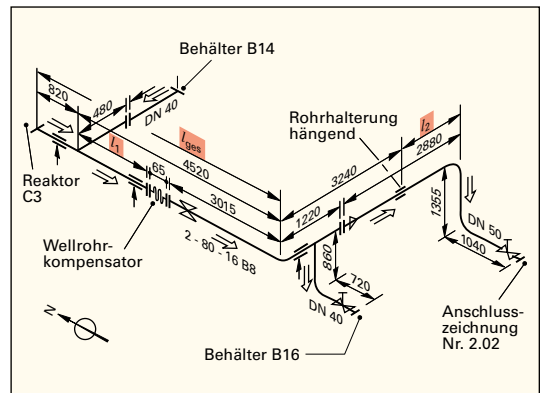


Bild 1: Maße in einer Rohrleitungszeichnung

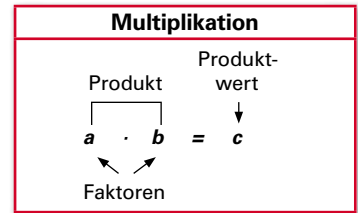
1.3.2 Multiplizieren

Beim **Multiplizieren** (umgangssprachlich Malnehmen, engl. to multiply) werden die Faktoren miteinander malgenommen und ergeben den Produktwert, kurz auch Produkt genannt.

Das mathematische Zeichen für Multiplizieren ist \cdot oder \times .

Bei allgemeinen Zahlen kann das Multiplikationszeichen weggelassen werden, z.B. ab anstatt $a \cdot b$.

Die Ziffer 1 wird meist nicht mitgeschrieben. **Beispiel:** $1a = a$



Rechenregeln beim Multiplizieren	Formeln	Beispiele
Ist ein Faktor 0, so ist das ganze Produkt 0.	$a \cdot b \cdot c \cdot 0 = 0$	$387 \cdot 229 \cdot 712 \cdot 0 = 0$
Die Faktoren können vertauscht werden.	$a \cdot b \cdot c = c \cdot b \cdot a$	$15 \cdot 28 \cdot 77 = 77 \cdot 28 \cdot 15$
Teilprodukte lassen sich zusammenfassen.	$a \cdot a \cdot b = a^2 \cdot b$	$5 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 30 \text{ m}^3$
Vorzeichen beim Multiplizieren		
Die Multiplikation von 2 Faktoren mit gleichen Vorzeichen ergibt ein positives Produkt.	$(+a) \cdot (+b) = a \cdot b = ab$ $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$	$2 \cdot 3 = 6$; $(-7) \cdot (-3) = 21$ $(+a) \cdot (+b) = a \cdot b = ab$ $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$
Die Multiplikation von 2 Faktoren mit unterschiedlichen Vorzeichen ergibt ein negatives Produkt.	$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$ $(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$	$5 \cdot (-2) = -10$; $(-6) \cdot 3 = -18$ $a \cdot (-b) = -ab$; $(-4) \cdot m = -4m$
Multiplizieren von Klammerausdrücken		
Ein Klammerausdruck wird mit einem Faktor multipliziert, indem man jedes Glied der Klammer mit dem Faktor multipliziert.	$a \cdot (b - c) = ab - ac$	$9 \cdot (7 - 3) = 9 \cdot 7 - 9 \cdot 3$ $= 63 - 27 = 36$ $5 \cdot (3 + 2) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 25$
Zwei Klammerausdrücke werden multipliziert, indem jedes Glied der einen Klammer mit jedem Glied der anderen Klammer multipliziert wird.	$(a + b) \cdot (c - d)$ $= ac - ad + bc - bd$	$(12 - 7) \cdot (3 + 5)$ $= 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 - 7 \cdot 3 - 7 \cdot 5$ $= 36 + 60 - 21 - 35 = 40$
Bei Klammerausdrücken mit bestimmten Zahlen wird zuerst der Zahlenwert der Klammer ermittelt und dann das Produkt berechnet.		$9 \cdot (7 - 3) = 9 \cdot 4 = 36$; $(12 - 7) \cdot (3 + 5) = 5 \cdot 8 = 40$
Ausklammern (Faktorisieren)		
Haben mehrere Glieder einer Summe einen gemeinsamen Faktor, so kann er ausgeklammert werden. Bei allgemeinen Zahlen wird dadurch die Summe in ein Produkt umgewandelt.	$ax + bx + cx$ $= x \cdot (a + b + c)$	$19 \cdot 7 - 19 \cdot 5 = 19 \cdot (7 - 5)$ $= 19 \cdot 2 = 38$ $3\pi x + 3\pi y = 3\pi(x + y)$ $L_0 + L_0 \alpha \cdot \Delta \vartheta = L_0(1 + \alpha \cdot \Delta \vartheta)$

Aufgaben zum Multiplizieren

- Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke
 - $(+3) \cdot (-15)$
 - $(+9) \cdot (+7)$
 - $(-7) \cdot (-12)$
 - $(+5) \cdot 0$
 - $(0) \cdot (-16)$
 - $(-3a) \cdot (+8b) \cdot (+2c)$
 - $(+9x) \cdot (-4y)$
 - $(+13m) \cdot (+4m) \cdot (+2m)$
- Führen Sie die Multiplikationen aus:
 - $3(3a - 2b)$
 - $9(7u + 8v)$
 - $(-5) \cdot (-4x - 7y)$
 - $(+16) \cdot (0) \cdot (4 + 32)$
 - $(6c - 3d) \cdot (+2a)$
 - $-x(y - z)$
 - $4uv(9r - 5s)$
 - $-(4ab + 7xy) \cdot (-12)$
 - $W = p \cdot (V_2 - V_1)$
 - $m_M = \varrho_M \cdot \left(\frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2} \right)$
- Multiplizieren Sie die Ausdrücke:
 - $(7s + 5r) \cdot (3l - 6k)$
 - $5(3u - 4v) \cdot 8 \cdot (2w - 9x)$
 - $(-4) \cdot (9w + 3x) \cdot (-3) \cdot (8y - 5z)$
 - $11a(-3b + 2x) \cdot (4c - 5y)$
- Welche Zahl liefert der Ausdruck, wenn für $x = 3$ und $y = 4$ gesetzt wird?

$$7(5 - 2x) \cdot (-4) \cdot (-3 + 6y)$$
- Klammern Sie aus:
 - $2ab + 2ac + 2ad$
 - $\pi n r_1 + \pi n r_2$
 - $k \cdot A \cdot \vartheta_2 - k \cdot A \cdot \vartheta_1$
 - $\pi r_1^2 + \pi h^2$

1.3.3 Dividieren

1

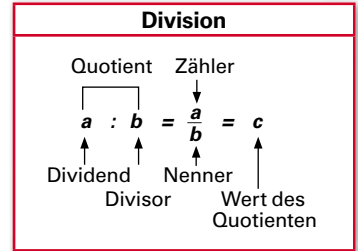
Das Dividieren (umgangssprachlich Teilen; engl. to divide) ist die Umkehrung des Multiplizierens.

Das mathematische Zeichen für Dividieren ist der Doppelpunkt : oder der Bruchstrich $\frac{\quad}{\quad}$ bzw. der Schrägstrich \diagup .

Der Doppelpunkt : und der Bruchstrich $\frac{\quad}{\quad}$ sind gleichbedeutend.

Zähler und Nenner dürfen **nicht** vertauscht werden.

Ist der Nenner null, so hat der Quotient keinen bestimmten Wert, er kann nicht bestimmt werden.



Rechenregeln beim Dividieren	Formeln	Beispiele
Vorzeichen beim Dividieren Gleiche Vorzeichen bei Zähler und Nenner ergeben einen positiven Quotienten.	$\frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}$; $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$;	$(+2) : (+3) = \frac{2}{3}$; $\frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$
Ungleiche Vorzeichen von Zähler und Nenner ergeben einen negativen Quotienten.	$\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$; $\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{-4}{+7} = -\frac{4}{7}$; $\frac{+3}{-5} = -\frac{3}{5}$
Dividieren von Klammerausdrücken Ein Klammerausdruck wird dividiert, indem jedes Glied in der Klammer mit dem Nenner geteilt wird.	$(a - b) : x = a : x - b : x$	$\frac{36xyz - 24xuv}{6x}$ $= \frac{36xyz}{6x} - \frac{24xuv}{6x}$ $= 6yz - 4uv$
Der Bruchstrich fasst die Ausdrücke auf und unter dem Bruchstrich zusammen, als ob sie von einer Klammer umschlossen wären.	$\frac{a-b}{x} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x}$ $\frac{a+b}{c} \cdot d = \frac{a \cdot d}{c} + \frac{b \cdot d}{c}$	
Kürzen, Erweitern Beim Kürzen werden Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl geteilt.	$\frac{4ab}{6ac} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{a} \cdot b \cdot 2}{\cancel{6} \cdot \cancel{a} \cdot c \cdot 3} = \frac{2b}{3c}$	$\frac{-48xy}{36y} = \frac{-4 \cdot \cancel{12} \cdot xy}{3 \cdot \cancel{12} \cdot y}$ $= -\frac{4}{3}x$
Es können nur Faktoren gekürzt werden oder es müssen alle Summanden gekürzt werden.	$\frac{a(b+c)}{a} = b+c$ $\frac{ab+ac}{a} = b+c$	$\frac{9x-2y}{5z}$ erweitern mit $(-3) \Rightarrow$ $\frac{(9x-2y)(-3)}{5z \cdot (-3)} = \frac{-27x+6y}{-15z}$
Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl (Erweiterungszahl) multipliziert.	$b+c = \frac{(b+c)a}{a}$	

Aufgaben zum Dividieren

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

- a) $63 : (-7)$ b) $(-64) : (-4)$ c) $(-91) : 13$ d) $\frac{105}{15}$ e) $\frac{-96}{8}$ f) $\frac{-132}{-11}$
- a) $\frac{(-7) \cdot (18)}{12}$ b) $\frac{(11) \cdot (-14)}{(-7)}$ c) $\frac{(-9) \cdot (-18)}{(-36)}$
- a) $(156 - 72) : 14$ b) $(391 - 144) : (121 - 102)$
- Kürzen Sie soweit wie möglich:

a) $\frac{-12uv}{3v}$ b) $\frac{6a-3b}{3}$ c) $\frac{81xyz}{-9yz}$ d) $\frac{-187rs + 153rs + 34rs}{-17s}$ e) $\frac{21 \cdot (-9) \cdot 4x}{(-35) \cdot (-2)}$

f) $\frac{-(x-5)}{(5-x)}$ g) $\frac{-(7x-y) \cdot 3 + 2b}{-2b-3}$
- Erweitern Sie:

a) $\frac{7a}{5b}$ mit (-3) b) $\frac{3x}{-8y}$ mit (-1)

1.4 Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke

Bei der Berechnung von Ausdrücken, die sowohl Additionen und Subtraktionen (Strichrechnungen + -) als auch Multiplikationen und Divisionen (Punktrechnungen \cdot :) enthalten, werden die Rechenoperationen in einer bestimmten Reihenfolge durchgeführt:

1. Enthält der zu verrechnende Ausdruck nur Punktrechnungen und Strichrechnungen, so gilt:

Punkt vor Strich, d. h. Punktrechnungen müssen vor den Strichrechnungen ausgeführt werden.

Beispiele: $5 \cdot 7 + 65 : 13 = 35 + 5 = 40;$ $\frac{21}{7} - \frac{48}{6} + (-3) \cdot (-9) = 3 - 8 + 27 = 22$
 $\frac{122 - 66}{8} \cdot 14 = \frac{56}{8} \cdot 14 = 98;$ $125 : (+5) - (-80) : (-4) = +25 - 20 = 5$

2. Enthält ein Ausdruck neben Punktrechnungen und Strichrechnungen noch Klammern, so gilt:

Zuerst die Klammerausdrücke berechnen, dann die Punktrechnungen und anschließend die Strichrechnungen ausführen.

Beispiele: $3 \cdot (23 - 17) + 12 = 3 \cdot 6 + 12 = 18 + 12 = 30$
 $5a \cdot (11b - 8b) - 2b \cdot (3a + 4a) = 5a \cdot 3b - 2b \cdot 7a = 15ab - 14ab = ab$
 $\frac{7 \cdot (23,2 - 23,3)}{(2,4 + 4,6) \cdot (-0,5)} = \frac{7 \cdot 0,1}{7 \cdot 0,5} = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = 0,2$

3. Enthält der Ausdruck ineinander verschachtelte Klammerausdrücke, so gilt:

Zuerst die innerste Klammer, dann die nächstäußere Klammer usw. zusammenfassen.

Beispiel: $4ac + [(3a + 7a) \cdot 5c + 5ac] = 4ac + [10a \cdot 5c + 5ac] = 4ac + 50ac + 5ac = 59ac$

4. Enthält ein Ausdruck verschachtelte Klammern sowie Punktrechnungen und Strichrechnungen, so gilt:

Es wird in der Reihenfolge – Klammerausdrücke – Punktrechnungen – Strichrechnungen – ausgerechnet. Innerhalb der Klammerausdrücke gilt ebenfalls: Punktrechnungen vor Strichrechnungen.

Aufgaben zum Berechnen zusammengesetzter Ausdrücke

- a) $-4 \cdot (0,2 - 3,2) + (14,5 - 8,5) \cdot (-0,1)$ b) $12x \cdot (-3y) + (0,75x - 0,50x) \cdot (+80)$
- a) $\frac{(-2,5) \cdot (86 - 82)}{(1,3 - 0,8) \cdot (42 - 38)}$ b) $\frac{222}{37} - \frac{0,125 \cdot (-85 + 117)}{(0,4) \cdot (-8) \cdot (2,5)}$ c) $24,7 \cdot \frac{(1 - 0,392)}{(1 - 0,065)}$
- a) $(23,8 - 21,3) \cdot \frac{2,14 + 0,86}{4,52 - 4 \cdot 0,38}$ b) $\frac{18,06 - 17,56}{0,25} + \frac{27}{3,2 + 5,8} - \frac{(0,2 + 2,8) \cdot (5,4 - 3,4)}{2,4 \cdot 2,5}$
- a) $2x - [5y - (3x - 4y) + 7x] - y$ b) $4,5a \cdot [(2b - c) - c] - 8a(c - b)$
 c) $[-0,2a - (1,7b - 1,9a)] : \left[\frac{5,5a}{10} - 0,85b + 0,3a \right]$
- a) $2 \cdot [-2xy - (20a - 12xy)] + 5(2a - x - y)$ b) $(0,3a \cdot (5xy - (92x - 87y)) - (84y - 82x))$
 c) $(-9,5x + [(1,5x - 4y) \cdot (0,5 + 6,5)] + 29y) \cdot \frac{1}{x + y}$

1.5 Bruchrechnen

1

Ein Bruch (engl. fraction) ist eine Divisionsaufgabe, die mit einem Bruchstrich geschrieben ist. Als Bruchrechnen bezeichnet man das Rechnen mit Brüchen.

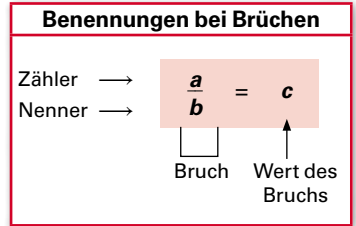
Ein Bruch besteht aus dem Zähler und dem Nenner.

Jeden Bruch kann man in eine Dezimalzahl umrechnen, z.B.: $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{3} = 0,333 \dots$

Mit Brüchen wird bevorzugt bei der Umwandlung von Formeln gerechnet.

Es gibt verschiedene **Brucharten**:

Brucharten	Beispiele	Merkmale	Brucharten	Beispiele	Merkmale
Echte Brüche	$\frac{1}{3}, \frac{5}{7}, \frac{2}{5}$	Zähler < Nenner	Gleichnamige Brüche	$\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}$	Brüche mit gleichen Nennern
Unechte Brüche	$\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{3}{2}$	Zähler ≥ Nenner Wert des Bruchs ≥ 1	Ungleichnamige Brüche	$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$	Brüche mit ungleichen Nennern
Gemischte Zahlen	$1\frac{1}{2}, 3\frac{2}{3}$	Ganze Zahl und Bruch	Scheinbrüche	$\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{10}{5}$	Der Wert des Bruchs ist eine ganze Zahl



Die Regeln des Kürzens und Erweiterns von Brüchen wurden bereits beim Dividieren genannt (Seite 12).

- Das Kürzen dient meist zur Vereinfachung der weiteren Rechnung oder des Ergebnisses.
- Durch Erweitern wird der Bruch so umgeformt, wie es für die weitere Rechnung vorteilhaft ist.

Beispiele zum Kürzen: $\frac{7}{21} = \frac{\cancel{7} \cdot 1}{\cancel{21} \cdot 3} = \frac{1}{3}$; $\frac{8ab}{14a} = \frac{\cancel{8} \cancel{a} b \cdot 4}{\cancel{14} \cancel{a} \cdot 7} = \frac{4b}{7}$; $\frac{32a + 4ab}{6a} = \frac{\cancel{4} \cdot 8(a + b) \cdot 2}{\cancel{6} \cdot a \cdot 3} = \frac{2(8 + b)}{3}$

Beispiel zum Erweitern: $\frac{2a - 3b}{2}$ erweitern auf den Nenner $10a \Rightarrow \frac{(2a - 3b) \cdot 5a}{2 \cdot 5a} = \frac{5a(2a - 3b)}{10a}$

1.5.1 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler zusammenfasst und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Beispiele: $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3}$; $\frac{3x}{5b} + \frac{7x}{5b} - \frac{4x}{5b} = \frac{3x + 7x - 4x}{5b} = \frac{6x}{5b}$

Addieren und Subtrahieren

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} - \frac{c}{x} = \frac{a + b - c}{x}$$

Brüche mit ungleichen Nennern (ungleichnamige Brüche) müssen vor dem Addieren bzw. Subtrahieren in Brüche mit gleichen Nennern (gleichnamige Brüche) umgewandelt werden und können erst dann zusammengefasst werden. Den gemeinsamen Nenner mehrerer Brüche nennt man **Hauptnenner**. Es ist das kleinste gemeinsame Vielfache, kurz das **kgV**, der einzelnen Nenner.

■ **Schema zur Ermittlung der Summe ungleichnamiger Brüche:** Beispiel: $\frac{3}{8} - \frac{5}{6} - \frac{7}{10}$

- Zerlegung in Primzahlfaktoren**
 Nenner Primzahlfaktoren
 $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
 $6 = 2 \cdot 3$
 $10 = 2 \cdot 5$
kgV = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$
- Hauptnenner (kgV) bestimmen**
 Das kgV ist das Produkt der größten Anzahl jeder vorkommenden Primzahl: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$. (Primzahlen sind die kleinsten Faktoren, in die eine Zahl zerlegt werden kann.)
- Erweiterungsfaktor der einzelnen Brüche bestimmen**
 $120 : 8 = 15$
 $120 : 6 = 20$
 $120 : 10 = 12$
- Gleichnamigmachen der einzelnen Brüche durch Erweitern**
 $\frac{3 \cdot 15}{8 \cdot 15} + \frac{5 \cdot 20}{6 \cdot 20} - \frac{7 \cdot 12}{10 \cdot 12} =$
- Addieren bzw. Subtrahieren der jetzt gleichnamigen Brüche**
 $\frac{45}{120} + \frac{100}{120} - \frac{84}{120} = \frac{61}{120}$

Zusammenfassen mehrerer Brüche mit bestimmten und allgemeinen Zahlen

Beispiel: $\frac{3x}{2a} - \frac{2x}{9ab} + \frac{5x}{18b}$

1. Hauptnenner bestimmen:

$$\begin{aligned} 2a &= 2 \cdot a \\ 9ab &= 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b \\ 18b &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot b \\ \text{kgV} &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 18ab \end{aligned}$$

2. Erweiterungsfaktoren bestimmen:

$$\begin{aligned} 18ab : 2a &= 9b \\ 18ab : 9ab &= 2 \\ 18ab : 18b &= a \end{aligned}$$

3. Erweitern und zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \frac{3x \cdot 9b}{2a \cdot 9b} - \frac{2x \cdot 2}{9ab \cdot 2} + \frac{5x \cdot a}{18b \cdot a} &= \frac{27bx}{18ab} \\ - \frac{4x}{18ab} + \frac{5ax}{18ab} &= \frac{x(27b-4+5a)}{18ab} \\ &= \frac{x(5a+27b-4)}{18ab} \end{aligned}$$

Aufgaben: Fassen Sie die folgenden Brüche zusammen

1. a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{24}$

b) $\frac{14}{25} + \frac{23}{15} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$

2. a) $\frac{7x}{4a} + \frac{5x}{12b}$

b) $\frac{5u}{3bc} + \frac{7u}{12c} - \frac{5u}{18b}$

1.5.2 Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Rechenregeln	Formeln	Beispiele
<p>Multiplizieren</p> <p>Brüche werden multipliziert, indem jeweils die Zähler miteinander und die Nenner miteinander multipliziert werden.</p> <p>Gemischte Zahlen werden miteinander multipliziert, indem sie zuerst in unechte Brüche umgewandelt und diese dann miteinander multipliziert werden.</p>	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot f = \frac{a \cdot c \cdot f}{b \cdot d}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$ $\frac{3y}{x} \cdot \frac{4x}{y} = \frac{3\cancel{y} \cdot 4\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{y}} = 12$ $3\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{112}{6} = \frac{56}{3}$
<p>Dividieren</p> <p>Ein Bruch wird durch einen 2. Bruch dividiert, indem der 1. Bruch mit dem Kehrwert des 2. Bruchs multipliziert wird.</p> <p>Ganze Zahlen können als Bruch mit dem Nenner 1 geschrieben werden.</p>	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ $a = \frac{a}{1}$	$\frac{3}{8} : \frac{5}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$ $\frac{1}{3} : 5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{15}$ $7 : \frac{7}{4} = \frac{7}{1} \cdot \frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 4}{1 \cdot 7} = 4$

Aufgaben zum Bruchrechnen

1. Fassen Sie zusammen

a) $\frac{8}{49} + \frac{6}{56} - \frac{3}{8}$ b) $3\frac{6}{25} - 18\frac{7}{10} + 24\frac{3}{5}$ c) $\frac{8x+4y}{4a+6b} + \frac{9x}{9b+6a} - \frac{5}{3}$

2. Multiplizieren Sie

a) $\frac{7}{6} \cdot \frac{3}{14}$ b) $\frac{11}{8} \cdot \frac{4}{22}$ c) $5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ d) $1\frac{5}{6} \cdot 3\frac{6}{15}$ e) $\frac{9ab}{5y} \cdot \frac{15x}{12a}$

3. Dividieren Sie

a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{2} : \frac{16}{7}$ c) $\frac{9}{5} : \frac{12}{15}$ d) $3xy : \frac{1}{2}z$ e) $\frac{2x}{9y} : \frac{4x}{3y}$ f) $\frac{26ab}{33u} : \frac{13a}{22v}$

4. Berechnen Sie bzw. fassen Sie soweit wie möglich zusammen

a) $14 \cdot \left(\frac{7}{12} + \frac{5}{8}\right)$ b) $42 \cdot \frac{7}{6} + \frac{9}{22}$ c) $\frac{8x+8y}{3r-3s} : \frac{4x+4y}{9r-9s}$ d) $\left(\frac{11}{15} - \frac{6}{10}\right) \cdot 8$ e) $\frac{5a-3b}{6n} + \frac{5a-3b}{3m}$

f) $5\frac{1}{2} - \left(\frac{6}{5} - \frac{2}{10}\right) \cdot \left[5 : \left(\frac{21}{3} - \frac{10}{2}\right)\right]$ g) $4\frac{2}{3} \cdot 3\frac{8}{5}$ h) $\left(12 : 2\frac{2}{3}\right) : \frac{7}{9}$ i) $\left(\frac{u+v}{l+k} + \frac{3(u+v)}{2(k+l)} - \frac{5(u-v)}{3(k+l)}\right) \cdot \frac{1}{2}$

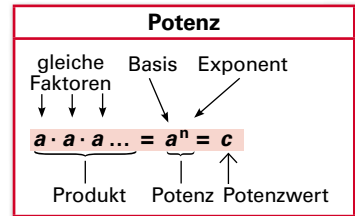
1.6 Rechnen mit Potenzen

1

Definition des Potenzbegriffs

Besteht ein Produkt aus mehreren gleichen Faktoren, so kann es abgekürzt als Potenz (engl. power) geschrieben werden. Der Exponent (Hochzahl) gibt an, wie viel Mal die Basis (Grundzahl) mit sich selbst multipliziert wird.

Beispiele: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ (gesprochen: 2 hoch 5)
 $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$



Die Potenzwerte von Potenzzahlen werden mit dem **Taschenrechner** berechnet. Dazu haben die Taschenrechner eine Potenziertaste, z.B. y^x oder \wedge

Beispiel: Es ist zu berechnen: $3,25^3$

Eingabe	3,25	y^x	3	=
Anzeige	3,25	$3,25^3$		34,328125

Das Vorzeichen beim Potenzieren

Beispiele: $(+2)^2 = (+2) \cdot (+2) = +4$; $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$; $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$
 $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$; $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ usw.

- Merke:**
- Ist die Basis positiv, so ist der Potenzwert immer positiv.
 - Ist die Basis negativ und der Exponent eine gerade Zahl, so ist der Potenzwert positiv.
 - Ist die Basis negativ und der Exponent eine ungerade Zahl, so ist der Potenzwert negativ.

Potenzen mit negativem Exponenten

Eine Potenz mit negativem Exponenten (z.B. a^{-n}) kann auch als Kehrwert der gleichen Potenz mit positivem Exponenten geschrieben werden. Umgekehrt kann eine Potenz mit positivem Exponenten im Zähler eines Bruchs als Potenz mit negativem Exponenten im Nenner des Bruchs gesetzt werden.

Beispiele: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0,008$; $3^{-4} = \frac{4^2}{3^4} = \frac{16}{81} = 0,1975$; $\frac{1}{\min} = \min^{-1}$

Potenzformeln

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{a^x}{b^y} = \frac{b^{-y}}{a^{-x}}$$

Sonderfälle bei Potenzen

Potenzen mit Basis 1. **Beispiel:** $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$; $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
 Merke: Jede Potenz mit der Basis 1 hat immer den Potenzwert 1.

Potenzen mit dem Exponent 0. **Beispiel:** $\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1$, da $\frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1$

Merke: Jede Potenz mit dem Exponent 0 hat den Wert 1.

$$1^n = 1$$

$$a^0 = 1$$

Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Sehr große und sehr kleine Zahlen können als Vielfaches der Potenzen der Basis 10 (Zehnerpotenzen) geschrieben werden.

Große positive Zahlen werden als Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten ausgedrückt.

Beispiele: $100000000 = 1,0 \cdot 10^8 = 10^8$; $7200000 = 7,2 \cdot 1000000 = 7,2 \cdot 10^6$

Sehr kleine Zahlen werden als Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten geschrieben.

Beispiele: $0,0085 = 85 \cdot 10^{-4}$; $0,0002938 = 2938 \cdot 10^{-7} = 2,938 \cdot 10^{-4}$

Aufgaben

1. Schreiben Sie in Potenzform:

- a) $2L \cdot 4L \cdot 8L$ b) $2a \cdot 3b \cdot 2a \cdot 3b$
 c) $1,5 \text{ cm} \cdot 2,3 \text{ cm} \cdot 1,4 \text{ cm}$

2. Berechnen Sie den Potenzwert:

- a) $21^{2,5}$ b) $(-6,3)^3$
 c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$ d) $2,4^{3,5}$

3. Schreiben Sie als Zehnerpotenz:

- a) 5000000 b) 0,0023
 c) 96485 d) 0,000082

Rechenregeln beim Potenzieren	Formeln	Beispiele
Addieren und Subtrahieren von Potenzen Potenzen können addiert oder subtrahiert werden, wenn sie sowohl dieselbe Basis als auch denselben Exponenten haben. Potenzausdrücke zuerst ordnen und dann die gleichnamigen Glieder zusammenfassen.	$x \cdot a^n + y \cdot a^n = (x + y) \cdot a^n$	$9 \cdot 3^4 - 6 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $= (9 - 6) \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $= 3 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3$ $4,2 \text{ cm}^2 + 5,8 \text{ cm}^2$ $= (4,2 + 5,8) \cdot \text{cm}^2 = 10,0 \text{ cm}^2$
Multiplizieren von Potenzen Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Basis beibehalten und mit der Summe der Exponenten potenziert wird. Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem ihre Basen multipliziert und der Exponent beibehalten wird.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ oder $2^2 \cdot 2^3 = 2^{(2+3)} = 2^5$ $10^{-3} \cdot 10^6 = 10^{(-3+6)} = 10^3$ $m^3 \cdot m^{-2} = m^{(3-2)} = m^1 = m$ $5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$ $4,0^3 \cdot \text{cm}^3 = (4,0 \cdot \text{cm})^3 = 64 \text{ cm}^3$
Dividieren von Potenzen Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem die gemeinsame Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert wird. Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem aus den Basen ein Bruch gebildet wird, der mit dem gemeinsamen Exponent potenziert wird.	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{2^6}{2^2} = 2^{6-2} = 2^4$ $\frac{m^5}{m^2} = m^{5-2} = m^3$ $\frac{12^3}{10^3} = \left(\frac{12}{10}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 = 1,728$
Potenzieren von Potenzen Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$ $(r^2)^x = r^{2 \cdot x} = r^{2x}$
Potenzieren von Summen aus Zahlen Eine Summe oder eine Differenz aus Zahlen wird zuerst ausgerechnet und dann potenziert.		$(2 + 5)^2 = 7^2 = 49$ $(9 - 3)^3 = 6^3 = 216$

Aufgaben zum Rechnen mit Potenzen

1. Addieren und Subtrahieren von Potenzen

- a) $4r^3 + 12r^2 - 2r^3 + 3r^3 + 3r^2$ b) $12 \text{ m}^2 + 7 \text{ m}^3 - 7 \text{ m}^2 + 5 \text{ m}^3$ c) $6,2x^4 + 3,4y^2 + 7,5x^4 - 3,4y^2$
 d) $2,8\pi r^2 h + \frac{4}{5}\pi r^3 - 1,75\pi r^3 + 2,2hr^2\pi$ e) $-14,3 \cdot 7^3 + 6,9 \cdot 11^4 + 1715 \cdot 7^{-3} + 1,1 \cdot 11^4 + 8,7 \cdot 7^3$

2. Multiplizieren von Potenzen

- a) $10^7 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5}$ b) $0,4a^4 \cdot 0,5a^5$ c) $2,5 \cdot 10^5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}$ d) $(r^3 - 2,5r^2) \cdot 2r^2$
 e) $d^{0,5x} \cdot d^{7x+3}$ f) $x^{a-n} \cdot x^{a+n}$ g) $(r + s)^2 \cdot (r + s)^3$ h) $(x + y)^a \cdot (x + y)^b$

3. Dividieren von Potenzen

- a) $\frac{10^3}{10^2}$ b) $\frac{10^3 \cdot 10^2}{10 \cdot 10^3}$ c) $\frac{225^3}{15^3}$ d) $\frac{780x^5}{39y^5}$ e) $\frac{2r^3}{3a^2} \cdot \frac{12a^2}{16r^3}$ f) $\frac{n^3}{x^4} \cdot \frac{n^3 \cdot x^4}{a}$

4. Potenzieren von Potenzen

- a) $(5^3)^2$ b) $(10^3)^{-2}$ c) $(4^2 \cdot axy^2)^3$ d) $5 \cdot (u^2 v^3)^5$ e) $(17)^2 \cdot (3^9)^3$ f) $(7^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^3$

5. Potenzieren von Summen

- a) $(3 + 7)^3$ b) $(22 - 17)^5$ c) $(23 - 14)^5$ d) $(5 + 9)^4$

1.7 Rechnen mit Wurzeln

1

Definition des Wurzelbegriffs

Das Wurzelziehen, auch Radizieren genannt, ist die Umkehrung des Potenzierens.

Durch Wurzelziehen (engl. extraction) soll ermittelt werden, welche Zahl (x) z.B. ins Quadrat (Exponent 2) erhoben werden muss, um den Potenzwert (25) zu erhalten. Als Operatorzeichen für das Wurzelziehen verwendet man das Wurzelzeichen $\sqrt{\quad}$, kurz Wurzel genannt.

Beispiele: $\sqrt[2]{16} = ?$; Lösung: $\sqrt[2]{16} = 4$, da $4^2 = 16$
 $\sqrt[3]{9} = ?$; Lösung: $\sqrt[3]{9} = 3$, da $3^3 = 9$

Ein Wurzelausdruck besteht aus dem Wurzelzeichen mit Wurzelexponent und der darunter stehenden Basis. Das Ergebnis ist der Wurzelwert (siehe rechts).

Einschränkung auf bestimmte Zahlen: Um Probleme beim Rechnen zu vermeiden, sollten die Basis a und der Wurzelwert c positive Zahlen und der Wurzelexponent n eine natürliche Zahl sein.

Verschiedene Wurzelexponenten

Da es bei Potenzen verschiedene Exponenten gibt (2, 3, 4, ...), gibt es auch Wurzeln mit verschiedenen Wurzelexponenten (2, 3, 4, ...).

Die einfachste Wurzel hat den Wurzelexponenten 2. Sie heißt Quadratwurzel oder einfach Wurzel. Beim Schreiben wird der Wurzelexponent 2 im Wurzelzeichen meist weggelassen: $\sqrt{\quad}$

Die Wurzel mit dem Wurzelexponenten 3 heißt Kubikwurzel oder 3. Wurzel.

Ab dem Wurzelexponent 4 wird der Wurzelname nur noch mit dem Wurzelexponent gebildet, also 4. Wurzel ($\sqrt[4]{\quad}$), 5. Wurzel ($\sqrt[5]{\quad}$) usw.

Außer beim Wurzelexponenten 2 muss der Wurzelexponent immer geschrieben werden.

Wurzeln in Potenzschreibweise

Ein Wurzelausdruck kann auch in Potenzschreibweise geschrieben werden. Dem Wurzeloperator entspricht ein Potenzbruch.

Der Zähler des Potenzbruchs ist der Exponent der Basis und sein Nenner ist der Wurzelexponent.

Da das Wurzelzeichen die Umkehrung des Potenzierens ist, heben sich Radizieren und Potenzieren mit demselben Exponenten auf.

In umgekehrter Reihenfolge gilt das bei negativen Zahlen nicht immer!

Berechnen von Wurzelzahlen

Der Wurzelwert von Wurzelzahlen wird mit dem Taschenrechner berechnet.

Zur Berechnung von Quadratwurzeln haben die Taschenrechner eine Quadratwurzeltaste, z.B. $\sqrt{\quad}$ oder \sqrt{x} .

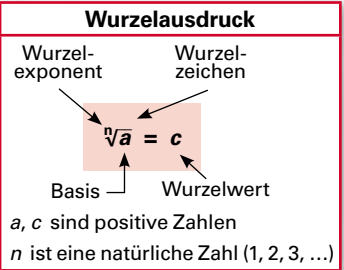
Wurzeln mit höheren Wurzelexponenten werden mit den entsprechenden Rechnertasten berechnet, z.B. $\sqrt[3]{\quad}$, $\sqrt[4]{\quad}$ oder $\text{INV } y^x$.

Beispiel: Potenzieren
 $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

Beispiel: Wurzelziehen
 $x^2 = 25$; $x = ?$

Schreibweise mit Wurzelzeichen:
 $\sqrt[2]{25} = ?$

Lösung: $\sqrt[2]{25} = 5$, da $5^2 = 25$



Beispiel: Quadratwurzel
 $\sqrt[2]{36} = \sqrt{36} = 6$
 (sprich: Wurzel aus 36 ist 6)

Beispiel: Kubikwurzel
 $\sqrt[3]{64} = 4$ (da $4^3 = 64$)
 (sprich: Kubikwurzel oder 3. Wurzel aus 64 ist 4)

Beispiel: 4. Wurzel
 $\sqrt[4]{16} = 2$ (da $2^4 = 16$)

Wurzel als Potenzausdruck

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1} = a^{\frac{1}{n}}$$

Beispiel: $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$

Aufheben des Wurzelziehens

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Beispiel: $(\sqrt[3]{64})^3 = 64$

Beispiele: Es sind zu berechnen:

a) $\sqrt{529}$; b) $\sqrt[4]{39,0625}$

a) Eingabe	\sqrt{x}	529	=	
Anzeige	$\sqrt{\quad}$	$\sqrt{529}$		23,00000

b) Eingabe	4	\sqrt{x}	39,0625	=
Anzeige	4	$\sqrt[4]{\quad}$	$\sqrt[4]{39,0625}$	2,500016

Rechenregeln beim Wurzelziehen	Formeln	Beispiele
Addieren und Subtrahieren von Wurzeln Es können nur Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten und gleicher Basis (so genannte gleichnamige Wurzeln) addiert oder subtrahiert werden. Man klammert die gleichnamige Wurzel aus und addiert bzw. subtrahiert die Beizahlen (Koeffizienten).	$x \cdot \sqrt[n]{a} + y \cdot \sqrt[n]{a} = (x + y) \cdot \sqrt[n]{a}$	$5 \cdot \sqrt[3]{125} + 12 \cdot \sqrt[3]{125} - 14 \cdot \sqrt[3]{125}$ $= (5 + 12 \dots 14) \cdot \sqrt[3]{125}$ $3 \cdot \sqrt[3]{125} = 3 \cdot 5 = 15$
Radizieren von Produkten Ein Produkt wird radiziert, indem <ul style="list-style-type: none"> entweder der Produktwert radiziert wird oder jeder einzelne Faktor des Produkts radiziert wird. 	$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$	$\sqrt{36 \cdot 81} = \sqrt{2916} = 54$ oder $\sqrt{36 \cdot 81} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{81}$ $= 6 \cdot 9 = 54$
Radizieren von Quotienten (Brüchen) Ein Quotient wird radiziert, indem <ul style="list-style-type: none"> entweder der Quotientenwert radiziert wird oder Zähler und Nenner getrennt radiziert werden. 	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{64} = \sqrt{4} = 2$ oder $\sqrt[4]{64} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2$
Radizieren von Potenzen Eine Potenz wird radiziert, indem man <ul style="list-style-type: none"> die Wurzel aus der Basis zieht und den Wurzelwert mit dem Exponenten der Basis potenziert oder die Wurzel in Potenzschreibweise umwandelt. 	$\sqrt[n]{a^x} = (\sqrt[n]{a})^x$ $\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$	$\sqrt{9^4} = (\sqrt{9})^4 = 3^4 = 81$ $\sqrt{9^4} = \sqrt[2]{9^4} = 9^2 = 81$
Radizieren von Summen und Differenzen Eine Summe oder eine Differenz kann nur radiziert werden, wenn vorher der Summenwert zahlenmäßig ausgerechnet oder zu einem Produkt zusammengefasst wurde.	$\sqrt[n]{a + b} = \sqrt[n]{(a + b)}$	$\sqrt[3]{81 + 44} = \sqrt[3]{125} = 5$ $\sqrt{289 - 145} = \sqrt{144} = 12$ $\sqrt{39x^2 y^2 + 25x^2 y^2}$ $= \sqrt{64x^2 y^2} = 8xy$

Aufgaben zum Rechnen mit Wurzeln

1. Berechnen Sie den Wurzelwert

a) $\sqrt{45796}$ b) $\sqrt{0,0065324}$ c) $\sqrt{1432,6225}$ d) $\sqrt[3]{39,785}$ e) $\sqrt[4]{42,424}$ f) $\sqrt{\pi}$

2. Berechnen Sie, nachdem Sie möglichst weit zusammengefasst haben

a) $2,8 \cdot \sqrt{3} + 1,9 \cdot \sqrt{5} - 2,1 \cdot \sqrt{5} - 1,6 \cdot \sqrt{3}$ b) $\frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{216} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{125} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{22,5}$

d) $(7 + \sqrt[4]{3}) \cdot (7 - \sqrt[4]{3})$ e) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ f) $\frac{5}{\sqrt[3]{343}}$ g) $\frac{7x \cdot \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$ h) $\sqrt[3]{27^4}$ i) $125^{\frac{2}{3}}$

3. Berechnen Sie

a) $\sqrt{1444 \cdot 729}$ b) $\sqrt[3]{125 \cdot 343 \cdot 27}$ c) $\sqrt{64^2}$ d) $3 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{2560}}{\sqrt[3]{5}}$ f) $\sqrt[4]{81^6}$ g) $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{7}\right)^6}$

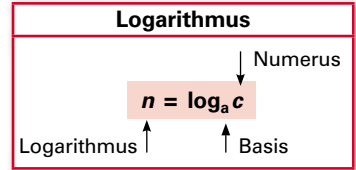
h) $4,3 \cdot \sqrt[3]{343} - 3,8 \cdot \sqrt[3]{343}$ i) $1\frac{1}{3}\sqrt{3} + 2\frac{2}{3}\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ j) $\sqrt{\left(\frac{3,9 \text{ m} - 2,7 \text{ m}}{3}\right)^2 + (0,3 \text{ m})^2}$

1.8 Rechnen mit Logarithmen

1.8.1 Definition des Logarithmus

Soll in einem Potenzausdruck $a^n = c$ der unbekannte Exponent n bestimmt werden, so ist das dazu erforderliche Rechenverfahren das **Logarithmieren** (engl. logarithm).

Der Logarithmus ist der Exponent n , mit dem die Basis a potenziert werden muss, um den Numerus c zu erhalten.



Man schreibt: $n = \log_a c$. Man spricht: n ist gleich dem Logarithmus von c zur Basis a .

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen der Potenzrechnung, der Wurzelrechnung und dem Logarithmieren:

Bei der **Potenzrechnung**: Berechnet wird der Potenzwert c : $c = a^n$ z.B. $100 = 10^2$

Bei der **Wurzelrechnung**: Berechnet wird die Basis a : $a = \sqrt[n]{c}$ z.B. $10 = \sqrt[2]{100}$

Beim **Logarithmieren**: Berechnet wird der Exponent n : $n = \log_a c$ z.B. $2 = \log_{10} 100$

Beispiele für Logarithmen

$\log_2 8 = 3$	da $2^3 = 8$;	$\log_2 32 = 5$	da $2^5 = 32$
$\log_3 9 = 2$	da $3^2 = 9$;	$\log_3 27 = 3$	da $3^3 = 27$
$\log_5 25 = 2$	da $5^2 = 25$;	$\log_5 125 = 3$	da $5^3 = 125$
$\log_{10} 10 = 1$	da $10^1 = 10$;	$\log_{10} 100 = 2$	da $10^2 = 100$
$\log_{10} 1000 = 3$	da $10^3 = 1000$	$\log_{10} 10000 = 4$	da $10^4 = 10000$
$\log_{10} 0,1 = -1$	da $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0,1$	$\log_{10} 0,01 = -2$	da $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01$

Logarithmensysteme

Alle Logarithmen einer Basis bilden ein Logarithmensystem. Als Basis kann außer 0 und 1 jede positive Zahl verwendet werden.

In den Naturwissenschaften und der Technik sind zwei Logarithmensysteme in Gebrauch.

Das Logarithmensystem mit der Basis 10 ist rechnerisch am einfachsten zu handhaben und deshalb das in der Technik und den Naturwissenschaften übliche Logarithmensystem.

Logarithmen der Basis 10 werden **dekadische Logarithmen** oder **Brigg'sche Logarithmen** genannt. Man schreibt sie entweder \log_{10} oder vereinfacht nur **log** oder **lg**.

Auf der Taschenrechnerastatur berechnet man dekadische Logarithmen mit der Taste $\boxed{\log}$ oder $\boxed{\text{LOG}}$.

In den Naturwissenschaften, wie z.B. der Chemie oder Physik, wird außerdem ein Logarithmensystem mit der Basis e angewandt: \log_e . Es wird **natürlicher Logarithmus** genannt und abgekürzt **ln** geschrieben.

(e , die sogenannte Euler-Zahl, ist eine Zahl, die zur Beschreibung natürlicher Wachstumsvorgänge benutzt wird. Sie beträgt $e = 2,7182818\dots$; mit unendlich vielen Stellen.)

Auf dem Taschenrechner berechnet man natürliche Logarithmenwerte mit der Taste $\boxed{\ln x}$ oder $\boxed{\text{LN}}$.

Die Logarithmen der beiden Systeme können mit einem Faktor ineinander umgerechnet werden (siehe rechts).

Umrechnen der Logarithmen

$$\lg x = 0,4342945 \cdot \ln x$$

$$\ln x = 2,3029851 \cdot \lg x$$

Beispiel: Es soll der natürliche Logarithmus (\ln) der Zahl 126 mit einem Taschenrechner ermittelt werden, der nur eine $\boxed{\log}$ -Taste besitzt.

Lösung: Mit der $\boxed{\log}$ -Taste wird bestimmt: $\lg 126 = 2,1003705$

Mit der Umrechnungsgleichung folgt:

$$\ln 126 = 2,3025851 \cdot \lg 126 = 2,3025851 \cdot 2,1003705 = \mathbf{4,8362819}$$