



Ergänzungsprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife

Mathematik Technik

Josef Dillinger

1. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 80871

Autor:
Josef Dillinger

1. Auflage 2025

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN 978-3-7585-8087-1

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2025 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Satz: Satz+Layout Werkstatt Kluth GmbH, 50374 Erftstadt
Umschlag: Zeichenbüro, Verlag Europa-Lehrmittel, Ostfildern
Druck: UAB BALTO print, 08217 Vilnius (LT)

Inhalt

Vorwort
Stichwortverzeichnis

Hinweise und Tipps

Aufbau und Ablauf der Prüfung	I
Inhalte der Prüfung	II
Bewertung	III
Aufgaben in diesem Buch	III
Methodische Hinweise und allgemeine Tipps	III

Ergänzungsprüfung 2015

Analysis:	$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 2}$	
	$f(x) = (1 - 2x) \cdot \ln(x - 0,5)$	
	$A(a) = \frac{274,62}{a} + 2,39a^2$	
	$F(s) = \frac{25}{14}s^3 - \frac{225}{7}s^2 + \frac{1800}{7}s$	2015-1
Analytische Geometrie:		2015-18

Ergänzungsprüfung 2016

Analysis:	$f(x) = \frac{2x^2}{(x-1)^2}$	
	$f(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$	
	$T(t) = T_R + (T_0 - T_R) \cdot e^{-kt}$	
	$K(x) = 0,2x^3 - 1,8x^2 + 20x + 24$	2016-1
Analytische Geometrie:		2016-15

Ergänzungsprüfung 2017

Analysis:	$f(x) = \frac{0,25x^2 - 2x - 3}{0,5x + 2}$	
	$h(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\pi\right)$	
	$g(x) = \frac{1}{12500}x^3 - \frac{9}{625}x^2 - \frac{137}{500}x + 103$	
	$A_{\text{ges}}(b) = \frac{11}{9}b^2 + \frac{68}{b}$	2017-1
Analytische Geometrie:		2017-20

Ergänzungsprüfung 2018

Analysis:	$f(x) = (x-2) \cdot \ln(0,1 \cdot (2x-4))$ $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 3}$ $Q(t) = 100 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ $g(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$ und $u(t) = 325 \text{ V} \cdot \sin(\omega t) \dots \dots$	2018-1
Analytische Geometrie:	2018-18

Ergänzungsprüfung 2019

Analysis:	$f(x) = 2(x+2) \cdot e^{-\frac{x}{4}}$ $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-1}$ $f(x) = \frac{3}{5} \cdot e^{-\frac{3}{8}x + \frac{6}{5}} \cdot (x+2)$ $k(x) = \frac{x^3}{100} - 3x^2 + 310x + 1000 \dots \dots$	2019-1
Analytische Geometrie:	2019-21

Ergänzungsprüfung 2020

Analysis:	$a(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2$ $f(x) = (1-x) + \ln(x+4)$ $f(x) = \frac{1}{1600}x^3 - \frac{1}{40}x^2 + 2$ $g(t) = \frac{7}{2}t \cdot e^{-\frac{3}{4}t} \dots \dots$	2020-1
Analytische Geometrie:	2020-17

Ergänzungsprüfung 2021

Analysis:	$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 0,5}$ $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{2x-4}\right)$ $P(t) = \frac{t^4}{16} - 8t^2 + 256]$ $p(t) = 12t \cdot e^{-0,2t} + 3 \dots \dots$	2021-1
Analytische Geometrie:	2021-26

Ergänzungsprüfung 2022

Analysis:	$h(x) = 24 \cdot \frac{x+3}{2x^2}$	
	$f(x) = -(x+1) \cdot \ln(x+1)$	
	$f(t) = a \cdot e^{-k \cdot t} + 40$	
	$g(x) = \frac{1}{50}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + 8x$	2022-1
Analytische Geometrie:	2022-17

Ergänzungsprüfung 2023

Analysis:	$f(x) = \frac{0,5x^2 - 2x}{x+1}$	
	$g(x) = \frac{5-2x}{\ln(2+x)}$	$h(x) = \ln\left(\frac{5-2x}{2+x}\right)$
	$A_1(t) = 2 \cdot e^{kt}$	
	$k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3\,240$	2023-1
Analytische Geometrie:	2023-18

Ergänzungsprüfung 2024

Analysis:	$f(x) = \frac{4x}{0,5x^2 + 2}$	
	$g(x) = 4x \cdot e^{1-0,05x}$	
	$s(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$	
	$k(x) = ax^4 + bx^2 + c$	2024-1
Analytische Geometrie:	2024-17

Vorwort

Liebe Lernende,

dieses Buch unterstützt Sie optimal bei Ihrer Vorbereitung auf die **Ergänzungsprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife** im Fach Mathematik. Zugleich können Sie es als unterrichtsbegleitendes Übungsbuch einsetzen, das Sie bei der systematischen Vorbereitung auf Kurzarbeiten und Schulaufgaben im Fach Mathematik unterstützt.

Das **Stichwortverzeichnis** ermöglicht Ihnen die gezielte Suche nach bestimmten Begriffen und Inhalten in den Abschlussprüfungsaufgaben.

Sie finden in diesem Band die Abschlussprüfungsaufgaben der **Jahrgänge 2015 bis 2024 mit ausführlichen Lösungswegen**. So können Sie Ihre eigenen Berechnungen mit den Lösungen vergleichen.

Im **Hinweisteil** erhalten Sie detaillierte **Informationen über den Ablauf der Prüfung**, die **Prüfungsinhalte** und die **Bewertung** der Prüfung.

Hinweise zur Prüfungsvorbereitung und **Tipps zur richtigen Strategie in der Prüfung** helfen Ihnen, Ihre Zeit optimal zu nutzen.

Eine Beschreibung zur **Arbeit mit einem Lösungsplan** gibt Ihnen die Möglichkeit, systematisches Vorgehen einzuüben und so Sicherheit für die Prüfungssituation zu gewinnen.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg für die Abschlussprüfung in Mathematik!



Josef Dillinger

Stichwortverzeichnis

Zum Gebrauch des Stichwortverzeichnisses:

17 1.2 bedeutet Jahrgang 2017, Analysis bzw. Analytische Geometrie, Teilaufgabe 1.2

Stichworte Analysis

Ableitungsfunktion

18 3.4; 21 2.1

Asymptoten

15 1.2; 16 1.2; 17 1.2; 18 2.2; 21 1.2; 21 3.2; 21 5.1; 22 1.2; 23 1.2

Aufstellen von Funktionstermen

15 4.3; 16 3.2; 16 4.2; 17 2.1; 17 3.1; 17 4.1; 17 4.2.1; 19 3.3.1; 19 4.2; 19 4.4;
20 3.1; 20 3.3.1; 20 4.6; 21 2.1; 21 4.1; 21 4.6; 22 3.1

Definitionsbereich

15 1.1; 15 2.1; 16 1.1; 17 1.1; 18 1.1; 18 2.1; 19 2.1; 20 2.1; 21 1.1; 21 3.1; 21 4.2;
22 1.1; 22 2.1; 23 2.2; 24 1.1

Differenzfunktion

17 3.4

Extrema (relative)

15 1.3; 15 2.3; 16 2.2; 17 1.3; 17 2.2.3; 18 1.3; 19 1.2; 20 3.3.2; 21 1.3; 21 2.3;
22 1.3; 22 2.3; 22 4.3; 23 1.3; 23 2.3.2; 24 2.3

Extremwertberechnung

15 3.4; 16 4.3; 17 4.2.2; 19 3.1; 19 3.2; 19 4.5; 20 1.2; 21 5.2; 23 3.4.2; 23 4.3;
24 2.3; 24 3.2.1; 24 4.2

Flächenberechnung

15 1.5; 15 2.6; 15 3.1; 15 3.2; 17 2.2.5; 18 1.5; 18 2.5; 19 1.6; 19 2.6; 19 3.3.3;
21 1.6; 21 2.7; 21 3.7; 21 4.5; 22 1.6.2; 22 2.6; 22 4.5; 23 1.6; 24 1.5.3

Funktionsgleichung erstellen

24 1.5.1; 24 3.1.1; 24 4.1

Graphen

15 1.4; 15 2.4; 15 3.5; 15 4.1; 16 1.4; 16 2.5; 16 3.4; 16 4.4; 17 1.5; 17 4.2.3; 18 1.4; 18 2.4;
18 3.5; 18 4.3.1; 19 1.4; 19 2.4; 19 4.3; 20 1.4; 20 2.5; 21 1.5; 21 2.4; 21 3.5; 21 3.6; 21 4.4; 21 5.4;
22 1.5; 22 2.4; 22 3.4; 22 4.1; 23 1.5; 23 2.3.3; 23 3.4.4; 23 4.5; 24 1.4; 24 2.4; 24 3.2.2; 24 4.4;
24 3.2.2; 24 4.4

Grenzwerte

15 1.2; 15 2.2; 15 3.3; 16 1.2; 16 3.1; 18 2.2; 18 3.1; 19 2.2; 20 4.1; 21 3.2; 22 1.2; 22 2.2; 22 3.2;
23 1.2; 23 3.3; 24 2.2

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

15 2.5; 19 3.3.2; 22 1.6.1; 22 2.5; 25 2.6

Integralrechnung

15 4.6; 16 2.6; 18 4.2.4; 18 4.3.2; 20 1.5.3; 20 2.7; 21 5.5.2; 24 2.6; 24 3.2.3; 24 4.5

Intervallbestimmung

19 4.6

Krümmungsverhalten

15 2.7; 19 1.3; 20 2.4; 22 2.3

Maximalwerte

18 4.2.3

Massenberechnung

17 4.2.4

Monotonieintervalle

23 1.3

Monotonieverhalten

15 2.7; 16 1.3; 18 2.3; 19 2.3; 20 2.3; 21 2.6; 21 3.4; 24 1.3

Neigungswinkel

17 3.5; 20 3.4

Normale

18 1.6

Nullstellen

15 2.1; 16 2.1; 16 4.2; 17 1.1; 17 2.2.1; 19 1.1; 20 1.1; 20 2.2; 21 3.3; 22 2.1; 22 4.2;
23 1.1; 23 2.1; 23 2.3.1; 23 4.4; 24 1.1; 24 3.1.3

Periodenlänge

16 2.3; 17 2.2.2

Prozentrechnen

15 4.2; 16 4.5; 18 3.2; 19 3.3.4; 19 4.7

Polynomdivision

15 1.2; 16 4.2; 18 2.2

Querschnittsfläche

20 3.5

Schnittpunkte von Graphen

17 1.2

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

15 1.1; 18 2.1; 22 1.1; 24 2.1

Sinus

18 4.1; 18 4.2.1

Stammfunktion

15 2.5; 16 1.5; 17 1.6; 20 2.6; 21 2.5; 21 5.5.1

Steigung von Graphen

15 4.4; 16 1.3; 16 3.3

Symmetrie

24 1.2

Tangente

17 1.4; 20 4.5; 21 1.4; 23 1.4

Terrassenpunkt

15 4.5; 16 1.6

Variablen ermitteln

23 3.1; 23 4.1

Volumenberechnung

17 3.6

Wendepunkt

15 1.3 ; 15 4.5; 16 2.4; 17 2.2.4; 17 3.2; 20 1.3; 20 4.4; 21 4.3; 21 5.3; 22 1.4; 22 3.7; 22 4.4;
23 2.3.2; 23 3.4.3; 24 2.3; 24 4.3

Winkelberechnung

24 2.5; 24 4.6

Stichworte Analytische Geometrie

Abstand Punkt-Ebene

15 1.3; 16 1.3; 21 1.3; 23 1.6; 24 5.4.2; 24 5.4.3

Abstand Punkt-Gerade

16 1.2.3

Abstand Punkt-Punkt

24 5.1

Abstand windschiefer Geraden

17 1.6

Ebene in Normalenform

15 1.1; 16 1.1; 17 1.1; 18 1.2; 19 1.2; 20 1.3; 21 1.2; 21 1.8; 22 1.1; 23 5.3; 24 5.2

Ebene in Parameterform

15 1.1; 16 1.1; 18 1.2; 19 1.2; 20 1.3; 22 1.1; 22 1.3; 24 5.2

Fläche eines Dreiecks

18 1.4

Flächenberechnung

19 1.3; 20 1.7; 21 1.6; 22 1.5; 23 1.2; 24 5.5

Gerade durch zwei Punkte

15 1.4

Gerade geschnitten mit Ebene

15 1.2; 21 1.4

Gerade parallel zu Ebene

16 1.3

Länge von Vektoren

17 1.5; 20 1.2; 22 1.4.2; 23 1.1; 23 1.5; 24 5.4.1

Punkt \subset Ebene

15 1.1; 17 1.4; 18 1.6

Punkt \subset Gerade

16 1.2.2

Punktbestimmung

19 1.1; 19 1.4; 21 1.1; 22 1.4.1; 22 1.5

Punktkoordinaten

20 1.1; 20 1.5; 21 1.5; 23 1.4; 23 1.5

Punktprobe

18 1.1

Schnittgerade Ebene–Ebene

17 1.2; 20 1.8

Schnittpunkt Ebene–Gerade

18 1.7; 19 1.5; 19 1.7; 20 1.4

Schnittpunkt Gerade–Gerade

19 1.4.

Schnittwinkel Ebene–Ebene

20 1.6

Schnittwinkel Gerade–Ebene

15 1.4; 16 1.2.1

Volumen einer Pyramide

15 1.6; 18 1.5

Windschiefe Geraden

15 1.5

Winkelberechnung

17 1.3; 18 1.3; 18 1.8; 18 1.9; 22 1.2; 23 1.3, 24 5.3

Hinweise und Tipps

Aufbau und Ablauf der Prüfung

Informationen zur Ergänzungsprüfung

Die Ergänzungsprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife wird zentral vom Bayerischen Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst gestellt. Durch das Ablegen dieser Prüfung in Mathematik können Sie als Schülerin oder Schüler einer Fachschule oder Fachakademie die allgemeine Fachhochschulreife erwerben.

Das Zeugnis der Fachhochschulreife, in das auch Noten von Fächern der Fachschule bzw. der Fachakademie übernommen werden, ist nur gültig in Verbindung mit dem Abschlusszeugnis der Fachschule bzw. Fachakademie.

Aufbau der Prüfung

Die Abschlussprüfung in Mathematik umfasst vier Aufgabentypen mit je 25 Bewertungseinheiten (BE). Die Gewichtung der Themengebiete Analysis und Analytische Geometrie beträgt 3 : 1, d. h., die Aufgaben aus der Analysis ergeben 75 BE und diejenigen aus der Analytischen Geometrie 25 BE.

Auswahl der Aufgaben

– Der Lehrer erhält vom Ministerium für Unterricht und Kultus folgende Unterlagen:

Analysis	4 Aufgabenvorschläge aus der Analysis mit je 25 BE
Geometrie	1 Aufgabenvorschlag mit 25 BE

– Aus den 4 Aufgabenvorschlägen aus der Analysis wählt der Lehrer für seine Prüflinge 3 Aufgaben aus.

– Sie erhalten vom Lehrer folgende Aufgaben:

Analysis	3 Aufgaben mit je 25 BE
Geometrie	1 Aufgabe mit 25 BE

– Sie haben keine Wahlmöglichkeit und müssen alle 4 Aufgabenteile bearbeiten.

Im Jahr 2021 wurden aufgrund der Corona-Pandemie der Lehrkraft 5 statt 4 Aufgabenvorschläge in Analysis zur Verfügung gestellt, von denen dann auch 3 ausgewählt wurden.

Prüfungszeit und erlaubte Hilfsmittel

- Die Prüfungszeit beträgt 180 Minuten.
- Als Hilfsmittel dürfen Sie einen elektronischen, nichtprogrammierbaren Taschenrechner und die Merkhilfe Mathematik (Technik) mit in die Prüfung nehmen. Die Merkhilfe finden Sie im Internet auf den Seiten des bayerischen Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung (www.isb.bayern.de) unter den Materialien.

Inhalte der Prüfung

Analysis

- weitere Ableitungsregeln (Produkt-, Quotienten- und Kettenregel)
- Kurvendiskussion von ganzrationalen, gebrochenrationalen, Exponential-, Logarithmus- und Wurzelfunktionen
- Integralrechnung/Stammfunktion
- Anwendung der Integralrechnung
 - Flächenberechnung
 - Volumenberechnung
 - Anwendung in Physik und Technik
- Extremwertaufgaben

Analytische Geometrie

- Vektoralgebra
 - Betrag von Vektoren
 - Winkel zwischen Vektoren
 - Skalarprodukt
 - Vektorprodukt, Anwendungen
- Geraden und Ebenen, Geradenscharen
 - Parametergleichung einer Geraden
 - Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden
 - Parameter- und Koordinatengleichung von Ebenen
 - Lagebeziehung zwischen Punkt – Ebene, Gerade – Ebene und Ebene – Ebene
- Skalarprodukt; Winkel
- Normalengleichung von Ebenen, Hesse'sche Normalenform
- Schnittwinkel zwischen zwei Geraden, Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene, Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen
- Abstandsberechnungen: Abstand Punkt – Ebene, Abstand Punkt – Gerade, Abstand paralleler Geraden, Abstand paralleler Ebenen, Abstand Gerade – parallele Ebene, Abstand windschiefer Geraden

Bewertung

Sie können in der Prüfung maximal 100 BE erzielen.

Benotung der Prüfungsaufgaben						
Note	sehr gut	gut	befriedigend	ausreichend	mangelhaft	ungenügend
BE	100–86	85–71	70–56	55–41	40–20	19–0

Aufgaben in diesem Buch

Sie finden in diesem Buch **Prüfungsaufgaben** der Ergänzungsprüfung mit ausgearbeiteten Lösungen.

Methodische Hinweise und allgemeine Tipps

Prüfungsvorbereitung

- Bereiten Sie sich **langfristig** (spätestens ab Januar) auf die Ergänzungsprüfung vor und fertigen Sie sich eine Übersicht über die von Ihnen bereits bearbeiteten Themen, Inhalte und Verfahren an. Teilen Sie die Inhalte in sinnvolle Teilbereiche ein und legen Sie fest, bis wann Sie welche Teilbereiche bearbeitet haben wollen.
Es ist zweckmäßig, alle schriftlichen Bearbeitungen dieser Aufgaben übersichtlich aufzubewahren, das erleichtert spätere Wiederholungen.
- Verwenden Sie während der Prüfungsvorbereitung grundsätzlich die **Hilfsmittel**, die auch in der Prüfung zugelassen sind. Nutzen Sie Ihren Taschenrechner mit allen Funktionen.
- Benutzen Sie zur Prüfungsvorbereitung neben diesem Übungsbuch Ihre **Unterrichtsaufzeichnungen** und das Lehrbuch.
- Oft ist der Zeitfaktor ein großes Problem. Testen Sie, ob Sie eine Aufgabe in der dafür vorgegebenen Zeit allein lösen können. **Simulieren Sie die Prüfungssituation**, indem Sie sich genau an die Zeitvorgaben halten und zum Beispiel einen Wecker stellen.
- Als Richtzeit können Sie für eine Aufgabe (25 BE) etwa 45 Minuten einrechnen.

In der Prüfung

- Lesen Sie die Aufgabenstellungen genau durch, bevor Sie anfangen zu rechnen. Gehen Sie sicher, dass Sie verstanden haben, was in der Aufgabe gefragt ist.
- Beachten Sie, dass in manchen Teilaufgaben „**Zwischenlösungen**“ angegeben sind, die Ihnen als Kontrolle dienen bzw. mit denen Sie weiterarbeiten können.
- Es ist hilfreich, wenn Sie bei der Analyse der Aufgabenstellungen wichtige Angaben oder Informationen (z.B. gegebene Größen, Lösungshinweise) **farbig markieren**.

- Um den Lösungsansatz zu einer Aufgabe zu finden oder die gegebene Problemstellung zu veranschaulichen, kann das **Anfertigen einer Skizze** nützlich sein.
- Achten Sie auf die **sprachliche Richtigkeit** und eine **saubere äußere Form** Ihrer Lösungen.

Die Arbeit mit einem Lösungsplan

Aufgrund des Umfangs und der Komplexität der Aufgaben empfiehlt es sich, beim Lösen systematisch zu arbeiten. Folgende Vorgehensweise hilft Ihnen dabei:

Schritt 1:

Nehmen Sie sich ausreichend Zeit zum **Analysieren** der Aufgabenstellung. Stellen Sie fest, zu welchem Themenbereich die Aufgabe gehört. Sammeln Sie alle Informationen, welche direkt gegeben sind, und achten Sie darauf, ob evtl. versteckte Informationen enthalten sind.

Schritt 2:

Markieren Sie die **Arbeitsanweisungen** in der Aufgabenstellung. Diese geben an, was in der Aufgabe von Ihnen verlangt wird. Verdeutlichen Sie sich die **Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe**.

Schritt 3:

Versuchen Sie, den Sachverhalt zu veranschaulichen. Beachten Sie alle vorherigen Ergebnisse. Besonders die Teilaufgaben, bei denen ein Zwischenergebnis angegeben ist, werden im Weiteren wieder benötigt. Fertigen Sie gegebenenfalls mithilfe der Angaben und Zwischenergebnisse aus vorherigen Teilaufgaben eine **Skizze** an.

Schritt 4:

Erarbeiten Sie nun schrittweise den **Lösungsplan**, um aus den gegebenen Informationen die gesuchte Größe zu erhalten. Notieren Sie sich, welche Einzel- bzw. Zwischenschritte auf dem Lösungsweg notwendig sind. Prinzipiell haben Sie zwei Möglichkeiten, oft hilft auch eine Kombination beider Vorgehensweisen:

- Sie gehen vom Gegebenen aus und versuchen, das Gesuchte zu erschließen.
- Sie gehen von dem Gesuchten aus und überlegen „rückwärts“, wie Sie zur Ausgangssituation kommen.

Bei diesem Schritt wird dann sukzessive die **Lösung dargestellt**.

Schritt 5:

Suchen Sie nach geeigneten Möglichkeiten, das Ergebnis zu **kontrollieren**. Oftmals sind bereits Überschlagsrechnungen, Punktproben und Grobskizzen ausreichend.

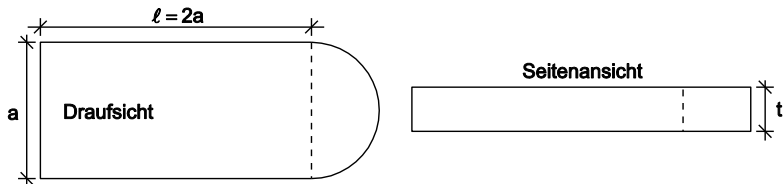
**Ergänzungsprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife in Bayern
Prüfung 2015 Mathematik (Technik) – Analysis**

- 1.0 Gegeben ist die reelle Funktion f mit BE
- $$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 2}$$
- auf ihrem maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$.
Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.
- 1.1 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f und berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen. 4
- 1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f in der Umgebung der Definitionslücke und für $x \rightarrow \infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$.
Ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f .
[Teilergebnis: $f(x) = x + 3 - \frac{6}{x-2}$] 6
- 1.3 Zeigen Sie, dass der Graph G_f keine relativen Extrempunkte und keine Wendepunkte besitzt.
[Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 10}{(x-2)^2}$] 6
- 1.4 Zeichnen Sie G_f im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ sowie alle Asymptoten von G_f in ein Koordinatensystem.
(Maßstab auf der x -Achse: 1 LE $\hat{=}$ 1 cm; Maßstab auf der y -Achse: 1 LE $\hat{=}$ 1 cm) 5
- 1.5 Der Graph G_f , die x -Achse und die Gerade mit der Gleichung $x=4$ schließen im ersten Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung von Teilaufgabe 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl A seines Flächeninhaltes auf zwei Nachkommastellen genau. $\frac{4}{25}$

- 2.0 Gegeben ist die reelle Funktion f mit dem Funktionsterm

$$f(x) = (1 - 2x) \cdot \ln(x - 0,5)$$
auf der maximalen Definitionsmenge D_f .
Der Graph dieser Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.
- 2.1 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_f und alle Nullstellen von f . 4
- 2.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \rightarrow \infty$. 1
- 2.3 Berechnen Sie die Koordinaten und die Art des relativen Extrempunktes von G_f .
[Teilergebnis: $f'(x) = -2 \cdot \ln(x - 0,5) - 2$] 6
- 2.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $0,5 < x \leq 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Verwenden Sie dazu auch Ihre bisherigen Ergebnisse.
Maßstab auf beiden Achsen: $1 \text{ LE} \hat{=} 2 \text{ cm}$ 4
- 2.5 Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = (x - 0,5)^2 \cdot (0,5 - \ln(x - 0,5))$ eine Stammfunktion der Funktion f ist. 4
- 2.6 Der Graph G_f , die x -Achse, die Gerade mit der Gleichung $x = 0,8$ und die Gerade mit der Gleichung $x = 1,2$ begrenzen ein endliches Flächenstück.
Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Flächenstücks. 3
- 2.7 Geben Sie jeweils – sofern möglich – ein Intervall $J = [x_1; x_2]$ Ihrer Wahl an, für das gilt:
- a) $f(x) < 0$ und zugleich $f'(x) < 0$ für alle $x \in J$
- b) $f'(x) > 0$ und zugleich $f''(x) > 0$ für alle $x \in J$ $\frac{3}{25}$

- 3.0 Die untenstehende Skizze zeigt den Grundriss und den Schnitt durch ein Schwimmbad, das im Grundriss aus einem Rechteck und einem Halbkreis zusammengesetzt ist. Die Innenwände und der Boden des Schwimmbeckens sollen gefliest werden.
Die Größen a und t sind Längenangaben in der Einheit Meter, wobei $a, t \in \mathbb{R}^+$ gilt. Für die Länge ℓ des rechteckigen Teils des Beckens gilt: $\ell = 2a$. Das eingefüllte Wasservolumen soll $V = 100 \text{ m}^3$ betragen.



- 3.1 Berechnen Sie den Flächeninhalt G der Grundfläche, die Tiefe t , den Umfang U sowie den Flächeninhalt A der gesamten zu fliesenden Fläche des Schwimmbades, wenn dieses mit einer Breite von $a = 5 \text{ m}$ gebaut würde. Geben Sie die Ergebnisse auf zwei Dezimalstellen nach dem Komma an. 5
- 3.2 Bestimmen Sie allgemein den Flächeninhalt $A(a)$ der gesamten zu fliesenden Fläche des Beckens in Abhängigkeit von a . 5

Führen Sie ab jetzt alle weiteren Berechnungen mit der vereinfachten Form des Terms von A durch:

$$A(a) = \frac{274,62}{a} + 2,39a^2 \quad (\text{ohne Einheiten})$$

- 3.3 Untersuchen Sie das Verhalten des Flächeninhaltes der gefliesten Fläche für $a \rightarrow 0$ sowie für $a \rightarrow \infty$.
Bringen Sie das Ergebnis für $a \rightarrow 0$ in Einklang mit der Tatsache, dass in diesem Fall faktisch die Breite des Schwimmbades unendlich klein ist. 4
- 3.4 Zeigen Sie, dass für $a_1 \approx 3,86 \text{ [m]}$ der Flächeninhalt der gefliesten Fläche minimal wird.
Berechnen Sie für diesen Fall die Maßzahl des Flächeninhaltes der gefliesten Fläche auf zwei Nachkommastellen genau. 6
- 3.5 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion A im Bereich $1 \leq a \leq 6$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Verwenden Sie dazu einen geeigneten Maßstab. $\frac{5}{25}$

- 4.0 Die Federgabel eines Mountainbikes mit einem maximalen Federweg von 140 mm wird von einem Fachmagazin getestet. Dabei wird überprüft, wie weit die Federgabel einfedert, wenn eine bestimmte Kraft von oben (z. B. durch Aufstützen auf den Lenker) oder von unten (aufgrund von Hindernissen auf der Straße) auf die Federgabel einwirkt. Die folgende Messtabelle zeigt den Zusammenhang zwischen dem Federweg s und der zugehörigen auf die Feder einwirkenden Kraft F .

Federweg s in cm	0,0	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0	14,0
Federkraft F in N	0	400	630	770	915	1 140	1 540	2 200

Der Zusammenhang zwischen der Kraft F und dem Federweg s kann in guter Näherung durch eine reelle Funktion F mit dem Term $F(s) = as^3 + bs^2 + cs$ beschrieben werden ($0 \leq s \leq 14$ cm; $a, b, c \in \mathbb{R}$). Der Graph von F wird „Federkennlinie“ G_F genannt. (Auf das Mitführen der physikalischen Einheiten kann verzichtet werden.)

- 4.1 Zeichnen Sie unter Zuhilfenahme der Messtabelle die Federkennlinie G_F . 4
- 4.2 In normaler Sitzposition übt ein „durchschnittlicher“ Radfahrer auf den Lenker eine Kraft von ca. 350 N (ewton) in Richtung der Federgabel aus. Eine Federgabel gilt als richtig eingestellt, wenn in dieser Situation die Gabel mit etwa 20 % des maximalen Federwegs eingefedert ist. Beurteilen Sie anhand der Federkennlinie, ob die Gabel korrekt eingestellt oder tendenziell zu hart bzw. zu nachgiebig ist. 2
- 4.3 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b, c auf zwei Nachkommastellen gerundet. 6

Verwenden Sie für die weitere Bearbeitung der Aufgabe folgenden Funktionsterm:

$$F(s) = \frac{25}{14}s^3 - \frac{225}{7}s^2 + \frac{1800}{7}s$$

- 4.4 Berechnen Sie die Steigung der Federkennlinie zu Beginn und am Ende des Federwegs. 3
- 4.5 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts W der Federkennlinie und geben Sie an, ob es sich bei dem Wendepunkt um einen Terrassenpunkt handelt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. 4
- 4.6 Die Spannenergie, die im maximal gestauchten Federelement aufgrund der von der Messvorrichtung verrichteten Arbeit gespeichert ist, lässt sich mit dem Integral
- $$E = \frac{1}{100} \int_0^{14} F(s) ds$$
- bestimmen. Berechnen Sie den Wert von E . 4
- 4.7 Argumentieren Sie, wie weit die Federgabel eingefedert sein muss, damit sie auf Fahrbahnnunebenheiten besonders sensibel reagieren kann. $\frac{2}{25}$

Lösung

1.0 $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 2}$

1.1 **Definitionsmenge**

Definitionsmenge einer Funktion bedeutet alle x -Werte, für die die Funktion definiert ist. Bei einem Bruchterm muss die Nullstelle des Nenners ausgeschlossen werden.

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen bedeutet Schnittpunkt mit der y -Achse ($x=0$) sowie Schnittpunkte mit der x -Achse ($y=0$).

Schnittpunkt mit der y -Achse: $x = 0 \Rightarrow f(0)$

$$f(0) = \frac{0^2 + 0 - 12}{0 - 2} = \frac{-12}{-2} = 6 \Rightarrow S_y(0|6)$$

Schnittpunkte mit der x -Achse (Nullstellen): $y = f(x) = 0$

Ein Bruchterm ist null, wenn der Zähler null ist.

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-1 - 7}{2} = -4 \in D_f; \quad x_2 = \frac{-1 + 7}{2} = 3 \in D_f \Rightarrow S_{x_1}(-4|0); \quad S_{x_2}(3|0)$$

1.2 **Grenzwertuntersuchung und Asymptoten**

Untersuchung des Verhaltens der Funktion f in der Umgebung der Definitionslücke $x=2$ bedeutet Grenzwertuntersuchung $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\overset{\rightarrow -6}{x^2 + x - 12}}{\underset{\rightarrow 0^-}{x - 2}} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\overset{\rightarrow -6}{x^2 + x - 12}}{\underset{\rightarrow 0^+}{x - 2}} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{vertikale Asymptote: } x = 2$$

Untersuchung des Verhaltens der Funktion f für $x \rightarrow \pm\infty$ bedeutet Grenzwertuntersuchungen $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overset{\rightarrow +\infty}{x^2 + x - 12}}{\underset{\rightarrow -\infty}{x - 2}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overset{\rightarrow -\infty}{2x + 1}}{1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{\rightarrow +\infty}{x^2 + x - 12}}{\underset{\rightarrow +\infty}{x - 2}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{\rightarrow +\infty}{2x + 1}}{1} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{keine horizontale Asymptote}$$

Um weitere Asymptoten der Funktion f zu bestimmen, werden der Grad des Zählers und der Grad des Nenners betrachtet. Der Grad des Zählers (zwei) ist um eins größer als der Grad des Nenners (eins), deshalb handelt es sich um eine schein gebrochenrationale Funktion, die durch Polynomdivision in eine ganzrationale Funktion (diese entspricht der schiefen Asymptote) und in eine echt gebrochenrationale Funktion (Restglied) zerlegt werden kann.

$$\frac{(x^2 + x - 12) : (x - 2) = x + 3 - \frac{6}{x - 2}}{\frac{-(x^2 - 2x)}{3x - 12} \quad \begin{array}{l} \text{ganzrationale} \\ \text{Funktion} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Restglied} \end{array}}$$

$$\frac{-(3x - 6)}{-6}$$

\Rightarrow schiefe Asymptote: $y = x + 3$

1.3 Relative Extrempunkte

Ist die Gleichung $f'(x) = 0$ in \mathbb{R} nicht lösbar, so besitzt der Graph G_f keine relativen Extrempunkte.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 2} = x + 3 - \frac{6}{x - 2} = x + 3 - 6(x - 2)^{-1}$$

Berechnung von $f'(x)$ mithilfe der Kettenregel

$$f'(x) = 1 + 6(x - 2)^{-2} = 1 + \frac{6}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 2)^2 + 6}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 10}{(x - 2)^2}$$

Alternativ: Berechnung von $f'(x)$ mithilfe der Quotientenregel

$$\left. \begin{array}{l} u(x) = x^2 + x - 12 \Rightarrow u'(x) = 2x + 1 \\ v(x) = x - 2 \Rightarrow v'(x) = 1 \end{array} \right\} \text{ in Quotientenregel einsetzen}$$

$$f'(x) = \frac{(2x + 1) \cdot (x - 2) - (x^2 + x - 12) \cdot 1}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x + x - 2 - x^2 - x + 12}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 10}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 10 = 0$$

Betrachtung der Determinante D

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -24 < 0$$

\Rightarrow Der Graph G_f besitzt keine relativen Extrempunkte.

Wendepunkte

Ist die Gleichung $f''(x) = 0$ in \mathbb{R} nicht lösbar, so besitzt der Graph G_f keine Wendepunkte.

$$f'(x) = 1 + 6(x - 2)^{-2} = \frac{x^2 - 4x + 10}{(x - 2)^2}$$