



Formeln zu Mathematik für die Fachhochschulreife

Bearbeitet von B. Grimm und B. Schiemann

3. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselderger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 85129

Autoren:

Bernhard Grimm Sindelfingen, Leonberg
Bernd Schiemann Durbach

Lektorat: Bernhard Grimm

Bildentwürfe: Bernhard Grimm

Bilderstellung: YellowHand, 73257 Köngen, www.yellowhand.de

Das vorliegende Buch wurde auf der **Grundlage der aktuellen amtlichen Rechtsschreibregeln** erstellt.

3. Auflage 2010, korrigierter Nachdruck 2020
Druck 6

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN: 978-3-8085-8514-6

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2010 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlaggestaltung: Idee Bernd Schiemann; Ausführung Michael Maria Kappenstein, Frankfurt/Main

Satz und Grafik: YellowHand, 73257 Köngen, www.yellowhand.de

Druck: Medienhaus Plump, 53619 Rheinbreitbach

Vorwort zur 1. Auflage:

Die Formelsammlung enthält hauptsächlich die Formeln, die zum Erwerb der Fachhochschulreife benötigt werden. Formeln der Grundlagenmathematik sind auf das Wesentliche reduziert enthalten.

Vorwort zur 2. Auflage:

Es sind nur kleine Änderungen vorgenommen worden, die auf Verbesserungsvorschlägen unserer Leser beruhen. Einige wenige Fehler haben wir natürlich auch korrigiert.

Vorwort zur 3. Auflage:

Neu ist das Kapitel Stochastik. Die Reihenfolge der Kapitel Vektorrechnung und Analysis wurde getauscht.

Ergänzt wurden die Volumenformeln für Pyramiden sowie in der Vektorrechnung die Formeln für Streckenteilungen und spitze Winkel.

Ihre Meinung interessiert uns!

Teilen Sie uns Ihre Verbesserungsvorschläge, Ihre Kritik aber auch Ihre Zustimmung zum Buch mit.

Schreiben Sie uns an die E-Mail-Adresse: lektorat@europa-lehrmittel.de

Gebiet	Inhalt	Seite	
B asiswissen	Bruchrechnen	6	
	Klammerrechnen	6	
	Potenzrechnen	6	
	Wurzelrechnen	6	
	Logarithmen	6	
	Flächenformeln	7	
	Volumenformeln und Oberflächenformeln	8	
	Winkelmaße	8	
	Winkelfunktionen am Dreieck	9	
	Winkelfunktionsbeziehungen	10	
	Lineare Funktion und Gerade	11	
	Quadratische Funktion und Parabel	11	
	Potenzfunktion, Parabel und Hyperbel	12	
	Logarithmusfunktion	12	
	Exponentialfunktion	12	
	Trigonometrische Funktionen	13	
	Umkehrfunktion f^{-1} (auch \bar{f})	13	
A nalysis	Ableitungen	14	
	Integrale	14	
	Symmetrien	14	
	Achsenschnittpunkte	15	
	Nullstellen	15	
	Näherungsverfahren nach Newton	15	
	Extrempunkte, Wendepunkte	16	
	Tangenten, Normalen	16	
	Flächenintegrale	17	
	Extremwertberechnung	17	
	Spezielle Integrationsverfahren und Integrationsregeln	18	
	V ektorrechnung	Vektordarstellung in \mathbb{R}^3	19
		Addition und Subtraktion	19
		Skalare Multiplikation	20
		Einheitsvektoren	20
		Strecke	20
		Lineare Abhängigkeit	21
Produkte von 2 Vektoren		21	
Orthogonale Projektionen		22	
Lotvektoren, Normalenvektoren		22	
Gerade g		23	
Punkt A und Gerade g		23	
Lagebeziehung zweier Geraden g und h		24	
Kürzester Abstand windschiefer Geraden		25	
Ebene E		26	
Ebene E und Punkt Q		27	
Ebene E und Gerade g		27	
Ebene E und Ebene F		28	

Gebiet	Inhalt	Seite
Stochastik	Zufallsexperiment, Ergebnismenge	29
	Ereignis, Ereignisarten	29
	Häufigkeit und statistische Wahrscheinlichkeit	30
	Klassische Wahrscheinlichkeit	30
	Baumdiagramm, Pfadregeln	31
	Bedingte Wahrscheinlichkeit	31
	Unabhängige und abhängige Ereignisse	32
	Gesetze der Kombinatorik, Urnenmodell	32
	Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsfunktion, Erwartungswert	33
	Gewinnspiel	33
	Varianz und Standardabweichung	34
	Bernoulli-Ketten	34
	Anhang	Mathematische Zeichen, Abkürzungen und Formelzeichen
Mathematische Fachbegriffe		37
Alphabetisches Register		38

Bruchrechnen

Variablen $\in \mathbb{Z}$; Nenner $\neq 0$

Addition und Subtraktion

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$$

Multiplikation

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Division

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Klammerrechnen

Variablen $\in \mathbb{R}$

Distributivgesetz:

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

Assoziativgesetz:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

1. Binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Binomische Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Potenzrechnen

$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $n, m \in \mathbb{N}$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

$$(a - b)^n = \begin{cases} + (b - a)^n & \text{für gerades } n \\ - (b - a)^n & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

Merke!

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \quad \text{aber} \quad 4a = a + a + a + a$$

Merke!

$$(-a)^2 = a^2 > 0 \quad \text{aber} \quad -a^2 = -(a^2) < 0$$

Wurzelrechnen

$a, b \in \mathbb{R}_+$; $c \in \mathbb{R}$; Nenner $\neq 0$

Das Ergebnis der Quadratwurzel ist für $D = \mathbb{R}$ stets größer gleich null:

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \text{aber:} \quad \sqrt[3]{c^3} = c$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Logarithmen

$a, b, c \in \mathbb{R}_+$; $n \in \mathbb{R}$; Nenner $\neq 0$

Der Logarithmus ist die Hochzahl n , mit der die Basis a potenziert werden muss, um den Wert b zu erhalten.

$$a^n = b \Leftrightarrow n = \log_a b$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Zehnerlogarithmus (am TR: log) Basis $a = 10$

$$\log_{10} b = \lg b$$

Natürlicher Logarithmus (am TR: ln) Basis $a = e$

$$\log_e b = \ln b$$

Binärer Logarithmus (nicht am TR) Basis $a = 2$

$$\log_2 b = \lg b$$

TR = Taschenrechner

Die Umkehrfunktion von $\ln x$ ist e^x . Es gilt:

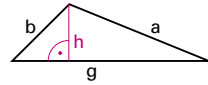
$$\ln e^n = n \quad \text{und} \quad e^{\ln a} = a \quad \text{mit} \quad e = 2,718281828459\dots$$

Flächenformeln

Fläche = A

Dreieck

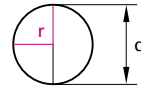
$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \quad A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$$



Kreis

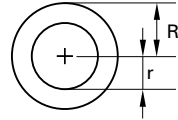
$$A = \pi \cdot r^2 \quad r = \text{Radius}$$

Umfang: $U = 2\pi \cdot r = \pi \cdot d$ Durchmesser: $d = 2 \cdot r$



Kreisring

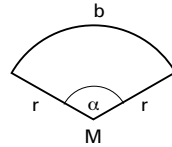
$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) \quad R = \text{Außenradius} \\ r = \text{Innenradius}$$



Kreis-sektor (Ausschnitt)

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \quad A = \frac{1}{2} b \cdot r$$

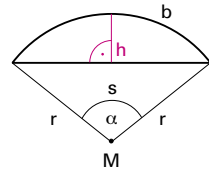
b = Bogenlänge



Kreis-segment (Abschnitt)

$$A = \frac{1}{2} \cdot [b \cdot r - s \cdot (r - h)]$$

Sehnenlänge $s = 2 \cdot \sqrt{2h \cdot r - h^2}$

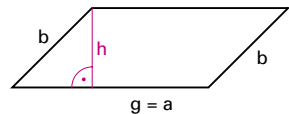


Parallelo-gramm

A = Grundseite · Höhe $A = g \cdot h$

Spezialfälle: Rechteck $A = a \cdot b$

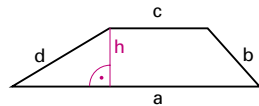
Quadrat $A = a^2$



Trapez

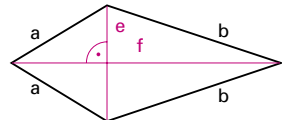
$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h \quad h = \text{Höhe}; b \neq d$$

a, c = parallele gegenüberliegende Seiten



Drachen

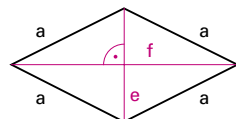
$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \quad e, f = \text{senkrecht aufeinander} \\ \text{stehende Diagonalen}$$



Raute

$$A = g \cdot h = a \cdot h \quad A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

Die Raute ist gleichzeitig Drachen und Parallelogramm. Alle Seiten sind gleich lang.



Volumenformeln und Oberflächenformeln

Volumen = V; Oberfläche = O

gleichmäßig dicke Körper

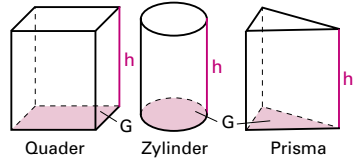
$$V = G \cdot h$$

V = Grundfläche · Höhe

$$O = 2G + M$$

M = Mantelfläche

Zylinderoberfläche: $O = 2\pi \cdot r \cdot (r + h)$



spitze Körper

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

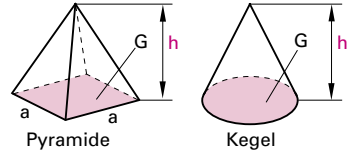
V = $\frac{1}{3}$ · Grundfläche · Höhe

Pyramide: $O = a^2 + a \cdot \sqrt{a^2 + 4h^2}$

$$M = a \cdot \sqrt{a^2 + 4h^2}$$

Kegel: $O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$

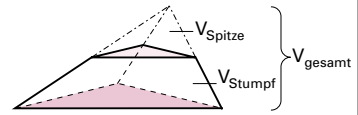
$$M = \pi r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$



stumpfe Körper

$$V_{\text{Stumpf}} = V_{\text{gesamt}} - V_{\text{Spitze}}$$

z. B. für Pyramidenstumpf, Kegelstumpf

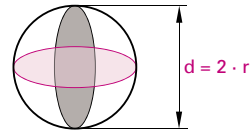


Kugel

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Oberfläche: $O = \pi \cdot d^2$

Umfang: $U = 2\pi \cdot r$



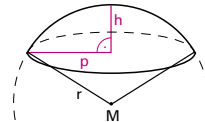
Kugel-segment (Abschnitt)

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

$$O = \pi h(4r - h)$$

$$p^2 = h \cdot (2r - h)$$

p = Grundkreisradius



Winkelmaße

Gradmaß (DEG) und Bogenmaß (RAD)

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha_r$$

Der Halbkreis hat $\alpha = 180^\circ$ (DEG), $\alpha_r = \pi$ (RAD).

Bogenmaß

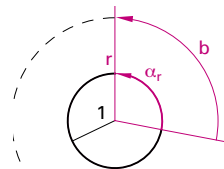
$$\alpha_r = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$$

$$\alpha_r = \frac{b}{r}$$

Bogenlänge

$$b = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha \cdot r$$

$$b = \alpha_r \cdot r$$



Einheitskreis: r = 1; U = 2π

Das Bogenmaß α_r ist die Bogenlänge am Einheitskreis.

Winkelfunktionen am Dreieck

Dreieck mit rechtem Winkel

$$\sin(\text{Winkel}) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \alpha = \arcsin \frac{a}{c}$$

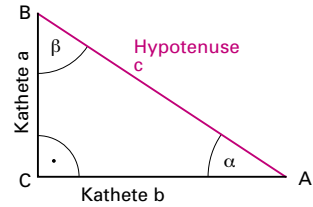
$$\cos(\text{Winkel}) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \alpha = \arccos \frac{b}{c}$$

$$\tan(\text{Winkel}) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad \alpha = \arctan \frac{a}{b}$$

sin = Sinus
cos = Cosinus
tan = Tangens



Die **Hypotenuse** liegt gegenüber dem rechten Winkel.
Die Kathete a ist die Gegenkathete von alpha und die Ankathete von beta.

Umkehrfunktionen (Arkusfunktionen) beim Taschenrechner:

arcsin:



arccos:



arctan:



beliebiges Dreieck

Sinussatz:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c} \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{c}{b}$$

Merke! Der Taschenrechner berechnet mit dem Sinussatz nur Winkel bis 90°.

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Umkreisradius R:

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{b}{2 \cdot \sin \beta} = \frac{c}{2 \cdot \sin \gamma}$$

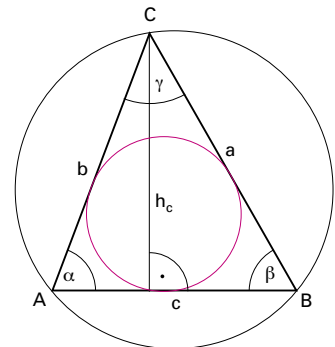
Inkreisradius r:

$$r = \frac{b+c-a}{2} \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{a+b-c}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{a+c-b}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2}$$

Höhen:

$$h_c = b \cdot \sin \alpha \quad h_a = b \cdot \sin \gamma \quad h_b = c \cdot \sin \alpha$$

Umkreis mit Umkreisradius R
Inkreis mit Inkreisradius r



Winkelfunktionsbeziehungen

Beziehungen

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

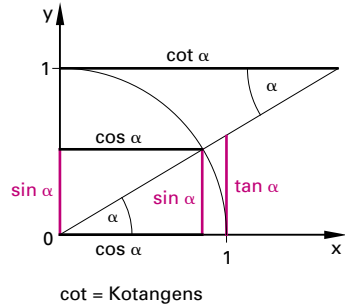
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$$



Merke! $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2$

aber: $\sin \alpha^2 = \sin(\alpha)^2$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Werte

Winkel im Gradmaß (DEG)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Winkel im Bogenmaß (RAD)	0	$\frac{1}{6} \cdot \pi$	$\frac{1}{4} \cdot \pi$	$\frac{1}{3} \cdot \pi$	$\frac{1}{2} \cdot \pi$	π	$\frac{3}{2} \cdot \pi$	$2 \cdot \pi$
sin(Winkel)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	1	0	-1	0
cos(Winkel)	1	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan(Winkel)	0	$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow \infty$	0