



Formeln zu Mathematik für die Fachhochschulreife

Bearbeitet von B. Grimm

4. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 85129

Autoren:

Bernhard Grimm Leonberg

Lektorat: Bernhard Grimm

Bildentwürfe: Bernhard Grimm

Bilderstellung: YellowHand, 73257 Köngen, www.yellowhand.de

4. Auflage 2023

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN: 978-3-8085-8515-3

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2023 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Ursprüngl. Satz und Grafik: YellowHand, 73257 Köngen
Bearbeitung ab 4. Auflage: Typework Layoutsatz & Grafik GmbH, 86152 Augsburg

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, Radevormwald

Druck: Plump Druck und Medien GmbH, 53619 Rheinbreitbach

Vorwort zur 1. Auflage:

Die Formelsammlung enthält hauptsächlich die Formeln, die zum Erwerb der Fachhochschulreife benötigt werden. Formeln der Grundlagenmathematik sind auf das Wesentliche reduziert enthalten.

Vorwort zur 2. Auflage:

Es sind nur kleine Änderungen vorgenommen worden, die auf Verbesserungsvorschlägen unserer Leser beruhen. Einige wenige Fehler haben wir natürlich auch korrigiert.

Vorwort zur 3. Auflage:

Neu ist das Kapitel Stochastik. Die Reihenfolge der Kapitel Vektorrechnung und Analysis wurde getauscht.

Ergänzt wurden die Volumenformeln für Pyramiden sowie in der Vektorrechnung die Formeln für Streckenteilungen und spitze Winkel.

Vorwort zur 4. Auflage:

Neu ist das Kapitel Kostenrechnen. Alle Variablen werden kursiv dargestellt. Die Ergebnismenge S in der Stochastik lautet jetzt Ω .

Ihre Meinung interessiert uns!

Teilen Sie uns Ihre Verbesserungsvorschläge, Ihre Kritik aber auch Ihre Zustimmung zum Buch mit.

Schreiben Sie uns an die E-Mail-Adresse: lektorat@europa-lehrmittel.de

Die Autoren und der Verlag Europa-Lehrmittel

Frühjahr 2023

Basiswissen

Bruchrechnen	6
Klammerrechnen	6
Potenzrechnen	6
Wurzelrechnen	6
Logarithmen	6
Flächenformeln	7
Volumenformeln und Oberflächenformeln	8
Winkelmaße	8
Winkelfunktionen am Dreieck	9
Winkelfunktionsbeziehungen	10
Lineare Funktion und Gerade	11
Quadratische Funktion und Parabel	11
Potenzfunktion, Parabel und Hyperbel	12
Logarithmusfunktion	12
Exponentialfunktion	12
Trigonometrische Funktionen	13
Umkehrfunktion f^{-1} (auch \bar{f})	13

Analysis

Ableitungen	14
Integrale	14
Symmetrien	14
Achsenschnittpunkte	15
Nullstellen	15
Näherungsverfahren nach Newton	15
Extrempunkte, Wendepunkte	16
Tangenten, Normalen	16
Flächenintegrale	17
Extremwertberechnung	17
Spezielle Integrationsverfahren und Integrationsregeln	18

Vektorrechnung

Vektordarstellung in \mathbb{R}^3	19
Addition und Subtraktion	19
Skalare Multiplikation	20
Einheitsvektoren	20
Strecke	20
Lineare Abhängigkeit	21
Produkte von 2 Vektoren	21
Orthogonale Projektionen	22

Lotvektoren, Normalenvektoren22
Gerade g	23
Punkt A und Gerade g23
Lagebeziehung zweier Geraden g und h24
Kürzester Abstand windschiefer Geraden25
Ebene E26
Ebene E und Punkt Q27
Ebene E und Gerade g27
Ebene E und Ebene F28

Stochastik

Zufallsexperimente, Ergebnismenge29
Ereignis, Ereignisarten29
Häufigkeit und statistische Wahrscheinlichkeit30
Klassische Wahrscheinlichkeit30
Baumdiagramm, Pfadregeln31
Bedingte Wahrscheinlichkeit31
Unabhängige und abhängige Ereignisse32
Gesetze der Kombinatorik, Urnenmodell32
Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsfunktion, Erwartungswert33
Gewinnspiel33
Varianz und Standardabweichung.34
Bernoulli-Ketten34

Kostenrechnung

Kosten35
Erlös, Gewinn, Break-even-Point35
Nachfragefunktion, Angebotsfunktion, Gleichgewichtspreis p_{GG}35
Erlösfunktion des Monopolisten36
Gewinnfunktion des Monopolisten bei linearer Kostenfunktion.36
Stückkosten bei linearer steigender Kostenfunktion37
Grenzkosten37
Betriebsminimum, Betriebsoptimum37

Alphabetisches Register38
--	------------

Bruchrechnen

Variablen $\in \mathbb{Z}$; Nenner $\neq 0$

Addition und Subtraktion

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$$

Multiplikation

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Division

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Klammerrechnen

Variablen $\in \mathbb{R}$

Distributivgesetz:

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

Assoziativgesetz:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

1. binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. binomische Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Potenzrechnen

$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $n, m \in \mathbb{N}$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

$$(a - b)^n = \begin{cases} + (b - a)^n & \text{für gerades } n \\ - (b - a)^n & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

Merke!

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \quad \text{aber} \quad 4a = a + a + a + a$$

Merke!

$$(-a)^2 = a^2 > 0 \quad \text{aber} \quad -a^2 = -(a^2) < 0$$

Wurzelrechnen

$a, b \in \mathbb{R}_+$; $c \in \mathbb{R}$; Nenner $\neq 0$

Das Ergebnis der Quadratwurzel

ist für $D = \mathbb{R}$ stets größer gleich null:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

aber:

$$\sqrt[3]{c^3} = c$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Logarithmen

$a, b, c \in \mathbb{R}_+$; $n \in \mathbb{R}$; Nenner $\neq 0$

Der Logarithmus ist die Hochzahl n , mit der die Basis a potenziert werden muss, um den Wert b zu erhalten.

$$a^n = b \Leftrightarrow n = \log_a b$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Zehnerlogarithmus
(am TR: log) Basis $a = 10$

$$\log_{10} b = \lg b$$

Natürlicher Logarithmus
(am TR: ln) Basis $a = e$

$$\log_e b = \ln b$$

Binärer Logarithmus
(nicht am TR) Basis $a = 2$

$$\log_2 b = \lg b$$

TR = Taschenrechner

Die Umkehrfunktion von $\ln x$ ist e^x . Es gilt:

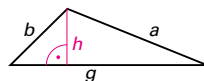
$$\ln e^n = n \quad \text{und} \quad e^{\ln a} = a \quad \text{mit} \quad e = 2,718281828459\dots$$

Flächenformeln

Fläche = A

Dreieck

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \quad A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$$

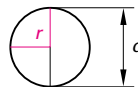


Kreis

$$A = \pi \cdot r^2 \quad r = \text{Radius}$$

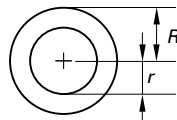
Umfang: Durchmesser:

$$U = 2\pi \cdot r = \pi \cdot d \quad d = 2 \cdot r$$



Kreisring

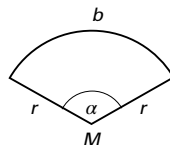
$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) \quad R = \text{Außenradius} \\ r = \text{Innenradius}$$



Kreis-
sektor
(Ausschnitt)

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \quad A = \frac{1}{2} b \cdot r$$

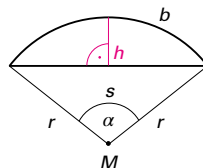
b = Bogenlänge



Kreis-
segment
(Abschnitt)

$$A = \frac{1}{2} \cdot [b \cdot r - s \cdot (r - h)]$$

Sehnenlänge $s = 2 \cdot \sqrt{2h \cdot r - h^2}$

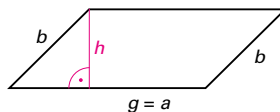


Parallelo-
gramm

A = Grundseite · Höhe $A = g \cdot h$

Spezialfälle: Rechteck $A = a \cdot b$

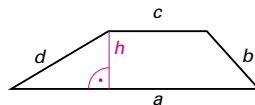
Quadrat $A = a^2$



Trapez

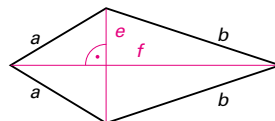
$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h \quad h = \text{Höhe}; b \neq d$$

a, c = parallele gegenüberliegende Seiten



Drachen

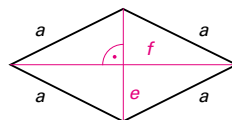
$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \quad e, f = \text{senkrecht aufeinander} \\ \text{stehende Diagonalen}$$



Raute

$$A = g \cdot h = a \cdot h \quad A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

Die Raute ist gleichzeitig Drachen und Parallelogramm. Alle Seiten sind gleich lang.



Volumenformeln und Oberflächenformeln

Volumen = V ; Oberfläche = O

gleichmäßig dicke Körper

$$V = G \cdot h$$

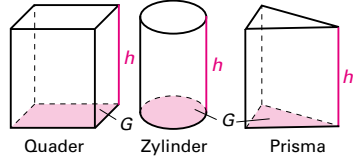
$V =$ Grundfläche \cdot Höhe

$$O = 2G + M$$

$M =$ Mantelfläche

Zylinderoberfläche:

$$O = 2\pi \cdot r \cdot (r + h)$$



spitze Körper

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$V = \frac{1}{3} \cdot$ Grundfläche \cdot Höhe

Pyramide:

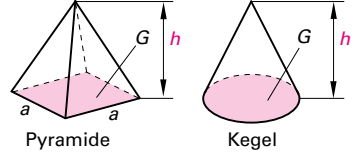
$$O = a^2 + a \cdot \sqrt{a^2 + 4h^2}$$

$$M = a \cdot \sqrt{a^2 + 4h^2}$$

Kegel:

$$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$

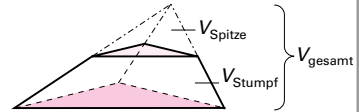
$$M = \pi r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$



stumpfe Körper

$$V_{\text{Stumpf}} = V_{\text{gesamt}} - V_{\text{Spitze}}$$

z. B. für Pyramidenstumpf, Kegelstumpf



Kugel

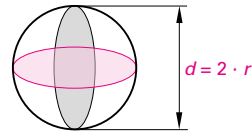
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Oberfläche:

$$O = \pi \cdot d^2$$

Umfang:

$$U = 2\pi \cdot r$$



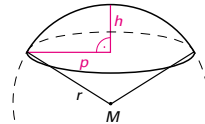
Kugel-segment (Abschnitt)

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

$$O = \pi h(4r - h)$$

$$p^2 = h \cdot (2r - h)$$

$p =$ Grundkreisradius



Winkelmaße

Gradmaß (DEG) und Bogenmaß (RAD)

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha_r$$

Bogenmaß

$$\alpha_r = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$$

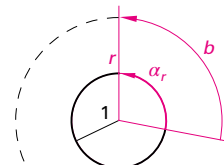
Der Halbkreis hat $\alpha = 180^\circ$ (DEG),
 $\alpha_r = \pi$ (RAD).

$$\alpha_r = \frac{b}{r}$$

Bogenlänge

$$b = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha \cdot r$$

$$b = \alpha_r \cdot r$$



Einheitskreis: $r = 1$; $U = 2\pi$

Das Bogenmaß α_r ist die Bogenlänge am Einheitskreis.

Winkelfunktionen am Dreieck

Dreieck mit rechtem Winkel

$$\sin(\text{Winkel}) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \alpha = \arcsin \frac{a}{c}$$

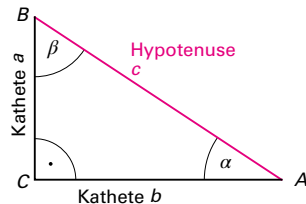
$$\cos(\text{Winkel}) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \alpha = \arccos \frac{b}{c}$$

$$\tan(\text{Winkel}) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad \alpha = \arctan \frac{a}{b}$$

sin = Sinus
cos = Cosinus
tan = Tangens



Die **Hypotenuse** liegt gegenüber dem rechten Winkel.
Die Kathete *a* ist die Gegenkathete von α und die Ankathete von β .

Umkehrfunktionen (Arkusfunktionen) beim Taschenrechner:

arcsin:



arccos:



arctan:



beliebiges Dreieck

Sinussatz:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c} \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{c}{b}$$

Merke! Der Taschenrechner berechnet mit dem Sinussatz nur Winkel bis 90°.

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Umkreisradius *R*:

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{b}{2 \cdot \sin \beta} = \frac{c}{2 \cdot \sin \gamma}$$

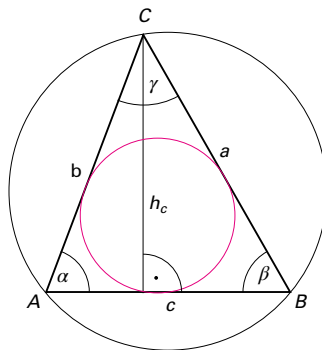
Inkreisradius *r*:

$$r = \frac{b+c-a}{2} \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{a+b-c}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{a+c-b}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2}$$

Höhen:

$$h_c = b \cdot \sin \alpha \quad h_a = b \cdot \sin \gamma \quad h_b = c \cdot \sin \alpha$$

Umkreis mit Umkreisradius *R*
Inkreis mit Inkreisradius *r*



Winkelfunktionsbeziehungen

Beziehungen

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

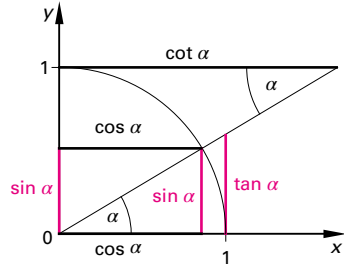
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$



cot = Kotangens

Merke! $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2$

aber: $\sin \alpha^2 = \sin(\alpha)^2$

Werte

Winkel im Gradmaß (DEG)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Winkel im Bogenmaß (RAD)	0	$\frac{1}{6} \cdot \pi$	$\frac{1}{4} \cdot \pi$	$\frac{1}{3} \cdot \pi$	$\frac{1}{2} \cdot \pi$	π	$\frac{3}{2} \cdot \pi$	$2 \cdot \pi$
sin(Winkel)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	1	0	-1	0
cos(Winkel)	1	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan(Winkel)	0	$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow \infty$	0