



Formeln zu Mathematik für die Fachhochschulreife

Bearbeitet von B. Grimm

5. Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 85129

Autoren:

Bernhard Grimm Leonberg

Lektorat: Bernhard Grimm

Bildentwürfe: Bernhard Grimm

Bilderstellung: YellowHand, 73257 Köngen, www.yellowhand.de

5. Auflage 2026

Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Korrektur von Druckfehlern identisch sind.

ISBN: 978-3-7585-8514-2

Bei Fragen zur Produktsicherheit wenden Sie sich bitte an produktsicherheit@europa-lehrmittel.de.

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2026 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
www.europa-lehrmittel.de

Ursprüngl. Satz und Grafik: YellowHand, 73257 Köngen
Bearbeitung ab 4. Auflage: Typework Layoutsatz & Grafik GmbH, 86153 Augsburg

Umschlaggestaltung: braunwerbeagentur, Radevormwald

Druck: ((folgt))

Vorwort zur 1. Auflage:

Die Formelsammlung enthält hauptsächlich die Formeln, die zum Erwerb der Fachhochschulreife benötigt werden. Formeln der Grundlagenmathematik sind auf das Wesentliche reduziert enthalten.

Vorwort zur 2. Auflage:

Es sind nur kleine Änderungen vorgenommen worden, die auf Verbesserungsvorschlägen unserer Leser beruhen. Einige wenige Fehler haben wir natürlich auch korrigiert.

Vorwort zur 3. Auflage:

Neu ist das Kapitel Stochastik. Die Reihenfolge der Kapitel Vektorrechnung und Analysis wurde getauscht.

Ergänzt wurden die Volumenformeln für Pyramiden sowie in der Vektorrechnung die Formeln für Streckenteilungen und spitze Winkel.

Vorwort zur 4. Auflage:

Neu ist das Kapitel Kostenrechnen. Alle Variablen werden kursiv dargestellt. Die Ergebnismenge S in der Stochastik lautet jetzt Ω .

Vorwort zur 5. Auflage:

Formeln wurden ergänzt und Grafiken bearbeitet. Das Spatprodukt wurde aufgenommen.

Ihre Meinung interessiert uns!

Teilen Sie uns Ihre Verbesserungsvorschläge, Ihre Kritik aber auch Ihre Zustimmung zum Buch mit.

Schreiben Sie uns an die E-Mail-Adresse: lektorat@europa-lehrmittel.de

Basiswissen

Bruchrechnen 6

Klammerrechnen 6

Potenzrechnen 6

Wurzelrechnen 6

Logarithmen 6

Flächen 7

Volumen und Oberflächen 8

Winkelmaße 8

Winkelfunktionen am Dreieck 9

Winkelfunktionsbeziehungen 10

Lineare Funktion und Gerade 11

Quadratische Funktion und Parabel 11

Potenzfunktion, Parabel und Hyperbel 12

Logarithmusfunktion 12

Exponentialfunktion 12

Trigonometrische Funktionen 13

Umkehrfunktion f^{-1} (auch $\bar{f}$) 13

Analysis

Ableitungen 14

Integrale 14

Symmetrien 14

Achsenschnittpunkte 15

Nullstellen 15

Näherungsverfahren nach Newton 15

Extrempunkte, Wendepunkte 16

Tangenten, Normalen 16

Flächenintegrale 17

Extremwertberechnung 17

Spezielle Integrationsverfahren und Integrationsregeln 18

Vektorrechnung

Vektordarstellung in $\mathbb{R}^3$ 19

Addition und Subtraktion 19

Skalare Multiplikation 20

Einheitsvektoren 20

Strecke 20

Lineare Abhängigkeit 21

Produkte von 2 Vektoren 21

Orthogonale Projektionen 22

Lotvektoren, Normalenvektoren	22
Gerade g	23
Punkt A und Gerade g	23
Lagebeziehung zweier Geraden g und h	24
Kürzester Abstand windschiefer Geraden	25
Ebene E	26
Ebene E und Punkt Q	27
Ebene E und Gerade g	27
Ebene E und Ebene F	28
Volumenberechnung mit dem Spatprodukt	28

Stochastik

Zufallsexperimente, Ergebnismenge	29
Ereignis, Ereignisarten	29
Häufigkeit und statistische Wahrscheinlichkeit	30
Klassische Wahrscheinlichkeit	30
Baumdiagramm, Pfadregeln	31
Bedingte Wahrscheinlichkeit	31
Unabhängige und abhängige Ereignisse	32
Gesetze der Kombinatorik, Urnenmodell	32
Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsfunktion, Erwartungswert	33
Gewinnspiel	33
Varianz und Standardabweichung	34
Bernoulli-Ketten	34

Kostenrechnung

Kosten	35
Erlös, Gewinn, Break-even-Point	35
Nachfragefunktion, Angebotsfunktion, Gleichgewichtspreis p_{GG}	35
Erlösfunktion des Monopolisten	36
Gewinnfunktion des Monopolisten bei linearer Kostenfunktion	36
Gewinnfunktion des Monopolisten bei nichtlinearer Kostenfunktion	36
Stückkosten bei linearer steigender Kostenfunktion	37
Grenzkosten	37
Betriebsminimum, Betriebsoptimum	37

Alphabetisches Register	38
--	-----------

BruchrechnenVariablen $\in \mathbb{Z}$; Nenner $\neq 0$

Addition und Subtraktion

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$$

Multiplikation

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Division

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

KlammerrechnenVariablen $\in \mathbb{R}$

Distributivgesetz:

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

Assoziativgesetz:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

1. binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. binomische Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Potenzrechnen $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; n, m \in \mathbb{N}$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

$$(a - b)^n = \begin{cases} + (b - a)^n & \text{für gerades } n \\ - (b - a)^n & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

Merke!

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \quad \text{aber} \quad 4a = a + a + a + a$$

Merke!

$$(-a)^2 = a^2 > 0 \quad \text{aber} \quad -a^2 = -(a^2) < 0$$

Wurzelrechnen $a, b \in \mathbb{R}_+; c \in \mathbb{R}$; Nenner $\neq 0$; $n, m \in \mathbb{N}$

Das Ergebnis der Quadratwurzel
ist für $D = \mathbb{R}$ stets größer gleich null:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

aber:

$$\sqrt[3]{c^3} = c$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Logarithmen $a, b, c \in \mathbb{R}_+; n \in \mathbb{R}$; Nenner $\neq 0$

Der Logarithmus ist die Hochzahl n , mit der die Basis a
potenziert werden muss, um den Wert b zu erhalten.

$$a^n = b \Leftrightarrow n = \log_a b$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Zehnerlogarithmus
(am TR: lg) Basis $a = 10$

$$\log_{10} b = \lg b$$

Natürlicher Logarithmus
(am TR: ln) Basis $a = e$

$$\log_e b = \ln b$$

Binärer Logarithmus
(nicht am TR) Basis $a = 2$

$$\log_2 b = \lg b$$

TR = Taschenrechner
Die Umkehrfunktion von
 $\ln x$ ist e^x . Es gilt:

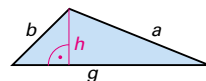
$$\ln e^n = n \quad \text{und} \quad e^{\ln a} = a \quad \text{mit} \quad e = 2,718281828459...$$

Flächen

Fläche = A

Dreieck

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \quad A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$$



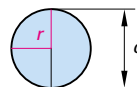
Kreis

$$A = \pi \cdot r^2 \quad r = \text{Radius} \\ \pi = 3,14159265...$$

Umfang:

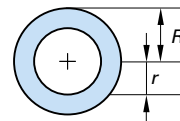
Durchmesser:

$$U = 2\pi \cdot r = \pi \cdot d \quad d = 2 \cdot r$$



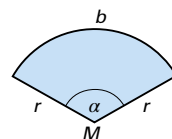
Kreising

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) \quad R = \text{Außenradius} \\ r = \text{Innenradius}$$

Kreissektor
(Ausschnitt)

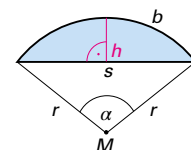
$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \quad A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r$$

$$b = \text{Bogenlänge:} \quad b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ}$$

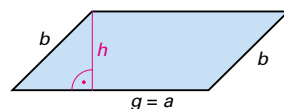
Kreis-
segment
(Abschnitt)

$$A = \frac{1}{2} \cdot [b \cdot r - s \cdot (r - h)]$$

$$\text{Sehnenlänge} \quad s = 2 \cdot \sqrt{2h \cdot r - h^2}$$

Parallelo-
gramm

$$A = \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} \quad A = g \cdot h$$

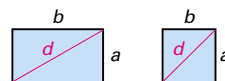


Spezialfälle:

$$\text{Rechteck:} \quad A = a \cdot b \quad d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Quadrat:} \quad A = a^2 \quad d = a \cdot \sqrt{2}$$

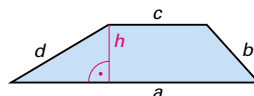
d = Diagonale



Trapez

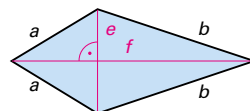
$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h \quad h = \text{Höhe; } b \neq d$$

a, c = parallele gegenüberliegende Seiten



Drachen

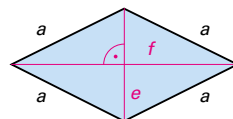
$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \quad e, f = \text{senkrecht aufeinander-} \\ \text{stehende Diagonalen}$$



Raute

$$A = g \cdot h = a \cdot h \quad A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

Die Raute ist gleichzeitig Drachen und Parallelogramm. Alle Seiten sind gleich lang.



Volumen und Oberflächen

Volumen = V ; Oberfläche = O ; Mantelfläche = M

gleichmäßig
dicke Körper

$$V = G \cdot h$$

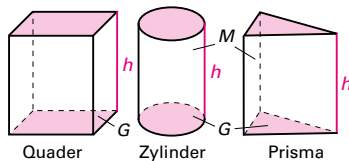
$$O = 2G + M$$

Mantelflächen sind weiß und senkrecht.

Zylinderoberfläche: $O = 2\pi \cdot r \cdot (r + h)$

Zylindermantelfläche: $M = 2\pi r \cdot h$

$$V = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$



spitze Körper

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$O = G + M$$

Pyramide:

$$O = a^2 + a \cdot \sqrt{a^2 + 4h^2}$$

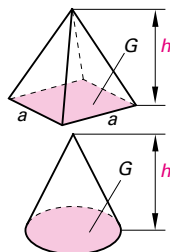
$$M = a \cdot \sqrt{a^2 + 4h^2}$$

Kegel:

$$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$M = \pi r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$



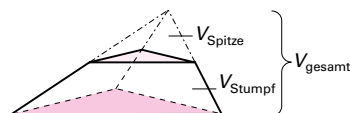
Merke:

Alle Flächen eines Körpers, die beim Tauchen in Wasser nass werden, bilden dessen Oberfläche.

stumpfe
Körper

$$V_{\text{Stumpf}} = V_{\text{gesamt}} - V_{\text{Spitze}}$$

z. B. für Pyramidenstumpf, Kegelstumpf

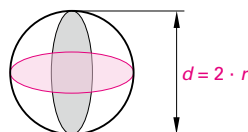


Kugel

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Oberfläche: $O = \pi \cdot d^2$

Umfang: $U = 2\pi \cdot r$



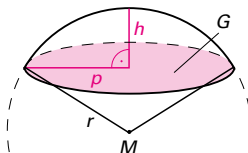
Kugel-
segment
(Abschnitt)

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)$$

$$O = \pi h (4r - h)$$

$$p^2 = h \cdot (2r - h)$$

p = Grundkreisradius



Winkelmaße

Gradmaß
(DEG) und
Bogenmaß
(RAD)

Gradmaß

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha_r$$

Der Halbkreis hat $\alpha = 180^\circ$ (DEG),
 $\alpha_r = \pi$ (RAD).

Bogenmaß

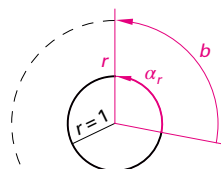
$$\alpha_r = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$$

$$\alpha_r = \frac{b}{r}$$

Bogenlänge

$$b = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha \cdot r$$

$$b = \alpha_r \cdot r$$



Einheitskreis: $r = 1$; $U = 2\pi$

Das Bogenmaß α_r ist die Bogenlänge am Einheitskreis.

Winkelfunktionen am Dreieck

sin = Sinus; cos = Cosinus; tan = Tangens

Dreieck mit
rechtem
Winkel

$$\sin(\text{Winkel}) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \alpha = \arcsin \frac{a}{c}$$

$$\cos(\text{Winkel}) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \alpha = \arccos \frac{b}{c}$$

$$\tan(\text{Winkel}) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad \alpha = \arctan \frac{a}{b}$$

Umkehrfunktionen (Arkusfunktionen)
beim Taschenrechner:

arcsin:

$$\sin^{-1}$$

arccos:

$$\cos^{-1}$$

arctan:

$$\tan^{-1}$$

Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

beliebiges
Dreieck

Sinussatz:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{c}{b}$$

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Umkreisradius R :

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{b}{2 \cdot \sin \beta} = \frac{c}{2 \cdot \sin \gamma}$$

Inkreisradius r :

$$r = \frac{b+c-a}{2} \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{a+b-c}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{a+c-b}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2}$$

Höhen:

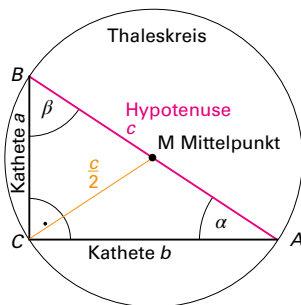
$$h_c = b \cdot \sin \alpha$$

$$h_a = b \cdot \sin \gamma$$

$$h_b = c \cdot \sin \alpha$$

Winkel:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

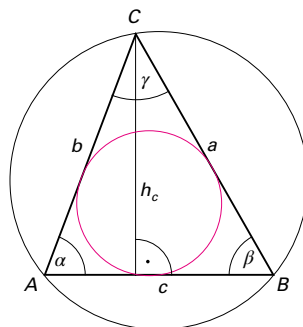


Die **Hypotenuse** liegt gegenüber dem rechten Winkel.
Die Kathete a ist die Gegenkathete von α und die Ankathete von β .

Die Menge aller Punkte mit rechtem Winkel gegenüber der Hypotenuse bilden den Thaleskreis. Sein Mittelpunkt halbiert die Hypotenuse.

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate.

Merke! Taschenrechner berechnen beim Sinussatz nur Winkel bis 90° .

Umkreis mit Umkreisradius R
Inkreis mit Inkreisradius r 

Winkelfunktionsbeziehungen

Beziehungen

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

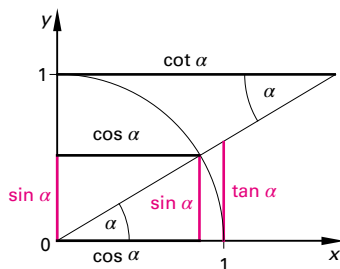
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$$



cot = Kotangens

Merke! $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2$

aber: $\sin \alpha^2 = \sin(\alpha^2)$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Werte

Winkel im Gradmaß (DEG)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Winkel im Bogenmaß (RAD)	0	$\frac{1}{6} \cdot \pi$	$\frac{1}{4} \cdot \pi$	$\frac{1}{3} \cdot \pi$	$\frac{1}{2} \cdot \pi$	π	$\frac{3}{2} \cdot \pi$	$2 \cdot \pi$
sin(Winkel)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	1	0	-1	0
cos(Winkel)	1	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan(Winkel)	0	$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\rightarrow \infty$	0	$\rightarrow \infty$	0

Lineare Funktion und Gerade

Funktionsgleichung

$$g: y = f(x) = m \cdot x + b$$

 m = Steigung; b = y -Achsenabschnitt

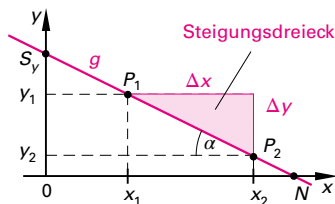
Steigung; Änderungsrate

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$$

 α SteigungswinkelFür die (in x -Richtung) steigenden Geraden ist $\Delta y > 0$.Für die (in x -Richtung) fallenden Geraden ist $\Delta y < 0$ (Bild).

$$D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}$$

Liegt ein Punkt $P(x_P|y_P)$ auf g , so ist die Geradengleichung für das Wertepaar $(x_P|y_P)$ erfüllt.

Steigungswinkel

$$\alpha = \arctan m$$

 $\tan^{-1}$ -Taste beim Taschenrechner

Achsenabschnitte

$$S_y(0|b)$$

$$N\left(\frac{-b}{m} \mid 0\right)$$

$$\text{Nullstelle: } x_0 = -\frac{b}{m}$$

$$\text{und: } b = y_P - m \cdot x_P \quad P \in g$$

Quadratische Funktion und Parabel

Funktionsgleichung

Normalform:

$$p: y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Scheitelform:

$$p: y = f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \quad \text{mit } S(x_S|y_S)$$

Für $a = 1; b = p; c = q$ auch:
 $y = x^2 + px + q$

$$D = \mathbb{R};$$

$$W = [y_S; +\infty[\quad \text{für } a > 0;$$

$$W =]-\infty; y_S] \quad \text{für } a < 0$$

Scheitel S

Scheitelkoordinaten:

$$x_S = -\frac{b}{2a}$$

$$y_S = f(x_S) = c - a \cdot x_S^2$$

Achsenabschnitte

$$S_y(0|c)$$

$$N_1(x_1|0)$$

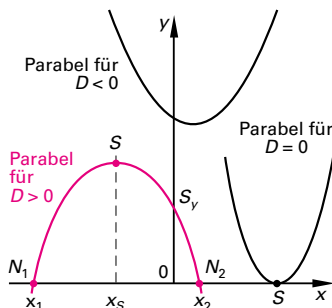
$$N_2(x_2|0)$$

Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Diskriminante:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Die Funktion $f(x)$ besitzt für:
 $D > 0$ zwei verschiedene Nullstellen,
 $D = 0$ doppelte Nullstelle ($x_{1,2} = x_S$),
 $D < 0$ keine reellen Nullstellen.

Funktionsgleichung mit Nullstellen

Für $D > 0$ gilt:

$$p: y = f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Für $D = 0$ gilt:

$$p: y = f(x) = a \cdot (x - x_S)^2$$

Potenzfunktion, Parabel und Hyperbel

Funktions-
gleichungen

Parabeln:

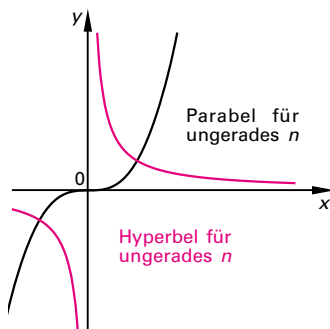
$$y = f(x) = a \cdot x^n \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N} \setminus \{1\};$$

$D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}$ für ungerades n ;
 $W = \mathbb{R}_+$ für gerades n

Hyperbeln:

$$y = f(x) = \frac{a}{x^n} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N};$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für ungerades n ;
 $W = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ für gerades n



Logarithmusfunktion

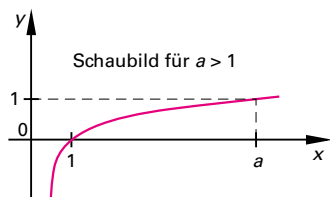
Funktions-
gleichung

$$y = f(x) = \log_a x \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\};$$

$D = \mathbb{R}_+$; $W = \mathbb{R}$

Die Schaubilder für alle Werte für a haben
den gemeinsamen Punkt $(1|0)$.

Die Schaubilder steigen streng monoton
für $a > 1$ und fallen streng monoton für
 $0 < a < 1$.



Exponentialfunktion

Funktions-
gleichung

$$y = f(x) = a \cdot b^x \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\};$$

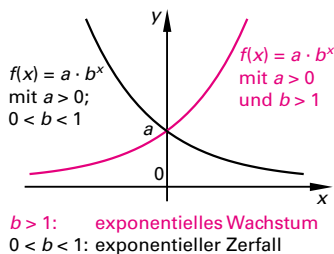
$D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}_+$.

Die Funktion besitzt keine Nullstellen.

Achsen-
abschnitte

$$y = f(0) = a \cdot b^0 = a \Leftrightarrow S_y(0|a)$$

Gemeinsamer Punkt der Schaubilder für
alle Werte b ist S_y .



$b > 1$: exponentielles Wachstum
 $0 < b < 1$: exponentieller Zerfall

e-Funktion

$$y = f(x) = a \cdot e^{b \cdot x} \quad \text{mit}$$

$$e = 2,718281828459...;$$

$a, b \in \mathbb{R}$; $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}_+$

$$e^{bx} \text{ hat nur Werte } > 0.$$

Das Schaubild steigt streng monoton für $a > 0$ und $b > 1$.

Das Schaubild fällt streng monoton für $a > 0$ und $0 < b < 1$.

Trigonometrische Funktionen

Sinus;
Kosinus

$$y = f(x) = \sin x$$

$$y = f(x) = \cos x$$

mit $D = \mathbb{R}$; $W = [-1; 1]$

• Nullstellen

Sinus: $x_k = k \cdot \pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Kosinus: $x_k = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

Die Periode ist $2\pi = 6,28\dots$

Allgemeine
Sinus-
funktion

$$y = f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x - c) + d]$$

mit $D = \mathbb{R}$; $W = [d - a; d + a]$ für $a > 0$
|a| Amplitude; b Frequenz

• Nullstellen
für $d = 0$

$$x_k = \frac{k \cdot \pi}{b} + c \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Periode: $p = \frac{2\pi}{b}$

Verschiebung in x-Richtung: c

Verschiebung in y-Richtung: d

Tangens

$$y = f(x) = \tan x$$

mit $D = \mathbb{R} \setminus \{x | 2k + 1\} \cdot \frac{\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z}\}$; $W = \mathbb{R}$

• Nullstellen

$$x_k = k \cdot \pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Die Periode ist $\pi = 3,14\dots$

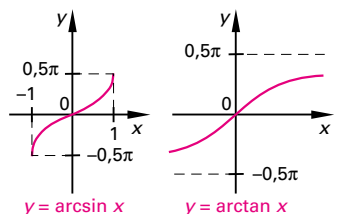
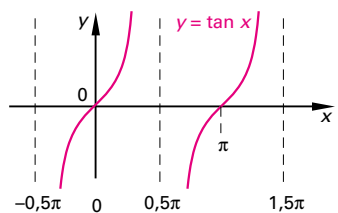
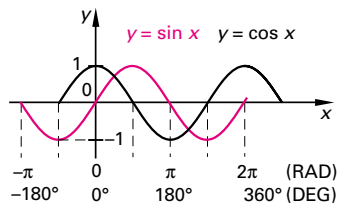
Arkus-
funktionen

Sie sind die trigonometrischen Umkehrfunktionen

$$y = f(x) = \arcsin x \quad \text{mit } D = [-1; 1]; W = [-0,5\pi; 0,5\pi]$$

$$y = f(x) = \arccos x \quad \text{mit } D = [-1; 1]; W = [0; \pi]$$

$$y = f(x) = \arctan x \quad \text{mit } D = \mathbb{R}; W =]-0,5\pi; 0,5\pi[$$



Umkehrfunktion f^{-1} (auch $\tilde{f}$)

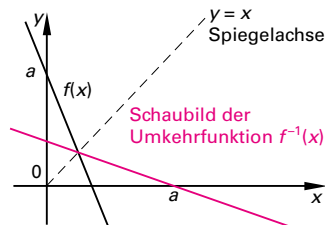
Ermittlung

rechnerisch:

1. Schritt: x und y vertauschen.
2. Schritt: nach y umstellen.

grafisch:

Schaubild an der 1. Winkelhalbierenden spiegeln.



Merke!

Nur streng monoton steigende und streng monoton fallende Funktionen sind im gesamten Intervall $]-\infty; +\infty[$ umkehrbar.

Ableitungen

Ableitung:
 $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$

$f(x)$	C	x	$a \cdot x$	x^n	$a \cdot x^n$	$a \cdot e^{bx}$	$\ln x$	$a \cdot \ln(bx)$	$a \cdot b^x$
$f'(x)$	0	1	a	$n \cdot x^{n-1}$	$a \cdot n \cdot x^{n-1}$	$a \cdot b \cdot e^{bx}$	x^{-1}	$a \cdot x^{-1}$	$a \cdot b^x \cdot \ln b$
$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$a \cdot \sin(bx)$	$a \cdot \cos(bx + c)$	$a \cdot \sin^2(bx)$			
$f'(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cos^2 x$	$a \cdot b \cdot \cos(bx)$	$-a \cdot b \cdot \sin(bx + c)$	$2 \cdot a \cdot b \cdot \sin(bx) \cdot \cos(bx)$			

Ableitungs-
regeln

Faktorregel

$$[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$$

Produktregel

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Kettenregel

$$\{f[g(x)]\}' = f'(g) \cdot g'(x) = \text{äußere Ableitung} \cdot \text{innere Ableitung}$$

Summenregel

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

Quotientenregel

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Integrale

Stammfunk-
tionen der
Integration
 $F(x) + C$

$f(x)$	0	1	a	$x^n, n \neq -1$	$a \cdot x^n, n \neq -1$	$a \cdot e^{bx}$	$\frac{a}{x}$	$\ln x$	a^x
$F(x)$	C	x	$a \cdot x$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{a \cdot x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{a}{b} \cdot e^{bx}$	$a \cdot \ln x $	$x \cdot \ln x - x$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\sin(a \cdot x)$	$a \cdot \cos(bx)$	$\sin^2(ax)$	$\tan(ax)$			
$F(x)$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\frac{1}{a} \cdot \cos(ax)$	$\frac{a}{b} \cdot \sin(bx)$	$\frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \cdot \sin(2ax)$	$-\frac{1}{a} \cdot \ln \cos(ax) $			

Arten

Unbestimmtes Integral

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$F(x)$ Stammfunktion für $C = 0$

C Integrationskonstante

Bestimmtes Integral
(Flächenintegral)

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

a, b Integrationsgrenzen

Symmetrien

Arten

Achsensymmetrie zur y -Achse

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$$

für ganzrationale Funktionen mit geraden Exponenten

Punktsymmetrie zum Ursprung

$$f(x) = -f(-x) \Rightarrow f(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^3 + c \cdot x$$

für ganzrationale Funktionen mit ungeraden Exponenten

Achsensymmetrie zu $x = x_s$

$$f(x_s - x) = f(x_s + x)$$

Punktsymmetrie zu $P(x_s | f(x_s))$

$$f(x_s - x) + f(x_s + x) = 2 \cdot f(x_s)$$

Achsenschnittpunktemit der
y-Achse

$$x = 0 \Rightarrow S_y(0|f(0)) \quad f(0) \text{ hei\u00dft y-Achsenabschnitt}$$

mit der
x-Achse

$$y = f(x) = 0 \Rightarrow N_1(x_1|0); N_2(x_2|0); N_3(x_3|0); \dots$$

Bei einfacher Nullstelle $x_1 \Rightarrow$ Schnittpunkt mit der x-Achse $N_1(x_1|0)$ Bei doppelter Nullstelle $x_{1,2} \Rightarrow$ Ber\u00fchrpunkt mit der x-Achse $N_{1,2}(x_{1,2}|0)$ Bei dreifacher Nullstelle $x_{1,2,3} \Rightarrow$ Sattelpunkt auf der x-Achse $N_{1,2,3}(x_{1,2,3}|0)$ **Nullstellen**Berechnungs-
verfahren

f\u00fcr $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

f\u00fcr $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \text{Substitution } x^2 = u \text{ und} \\ \text{R\u00fccksubstitution } x_{1,2} = \pm\sqrt{u}$$

f\u00fcr $f(x)$ ohne y-Achsenabschnitt $f(x) = 0 \Rightarrow$

Linearfaktorzerlegung durch Ausklammern $\Rightarrow$ Satz vom Nullprodukt.Funktions-
gleichungen
mithilfe der
Nullstellen
berechnen

$f(x)$ ist ganzrational	2. Grades	3. Grades	4. Grades
nur Nullstellen	$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$	$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$	$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$
mit 1 Ber\u00fchrpunkt	$y = a \cdot (x - x_1)^2$	$y = a \cdot (x - x_1)^2 \cdot (x - x_2)$	$y = a \cdot (x - x_1)^2 \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$
mit 1 Sattelpunkt	—	$y = a \cdot (x - x_1)^3$	$y = a \cdot (x - x_1)^3 \cdot (x - x_2)$
mit 2 Ber\u00fchrpunkten	—	—	$y = a \cdot (x - x_1)^2 \cdot (x - x_2)^2$

N\u00e4herungsverfahren nach NewtonNullstellen-
berechnung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad x_n \text{ gesch\u00e4tzter Wert; } x_{n+1} \text{ verbesserter Wert}$$

Schnitt-
punktberech-
nungBerechnung des Schnittpunktes der Funktionen mit $f(x)$ und $g(x)$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{d(x_n)}{d'(x_n)} \quad d(x) = f(x) - g(x) = \text{Differenzfunktion von } f(x) \text{ und } g(x). \\ d(x) \text{ hat dort Nullstellen, wo sich } f(x) \text{ und } g(x) \text{ schneiden.}$$

Extrempunkte, Wendepunkte

Hochpunkte und Tiefpunkte einer Funktion Die 1. Ableitung ist null, da das Schaubild der Funktion eine waagrechte Tangente ($m = 0$) besitzt:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 \text{ Stelle für den Extrempunkt}$$

$f''(x_1) < 0$	$f''(x_1) > 0$	$f''(x_1) = 0$		
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$f'''(x_1) \neq 0$	$f'''(x_1) = 0$	
		$\Downarrow$	$f^{IV}(x_1) < 0$	$f^{IV}(x_1) > 0$
$H(x_1 f(x_1))$	$T(x_1 f(x_1))$	$SP(x_1 f(x_1))$	$H(x_1 f(x_1))$	$T(x_1 f(x_1))$

H Hochpunkt; T Tiefpunkt; SP Sattelpunkt

Wendepunkte Die 2. Ableitung ist null, da das Schaubild der Funktion keine Krümmung besitzt:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x_W \text{ Stelle für den Wendepunkt}$$

$f'''(x_W) \neq 0$	$f'''(x_W) = 0$
$W(x_W f(x_W))$	Siehe oben bei Extrempunkte unter $f'''(x_1) = 0$.
Ist $f'(x_W) = 0$, so ist der Wendepunkt ein Sattelpunkt.	

Tangenten, Normalen

Tangente und Normale in einem gegebenen Berührungspunkt $B(x_B|y_B)$

Tangente:

$$t: y = m_t \cdot x + b_t, \text{ dabei sind:}$$

Tangentensteigung: y -Achsenabschnitt:

$$m_t = f'(x_B)$$

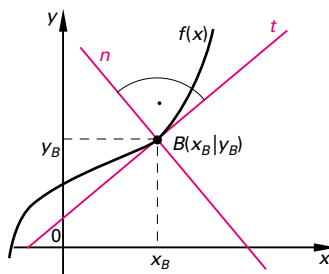
$$b_t = y_B - m_t \cdot x_B$$

Normale: $n: y = m_n \cdot x + b_n$, dabei sind:

Normalensteigung: y -Achsenabschnitt:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_B)}$$

$$b_n = y_B - m_n \cdot x_B$$



Tangenten von einem Punkt P außerhalb des Schaubildes

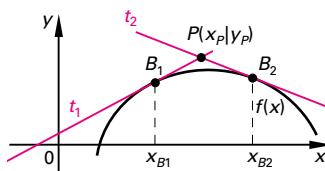
$$f'(x) \cdot (x - x_P) = f(x) - y_P \Rightarrow x = x_{Bi}$$

mit $i \in \mathbb{N}$

x_{Bi} Summe aller Berührstellen

Berührungspunkte:

$$B_i(x_{Bi}|f(x_{Bi}))$$



Flächenintegrale

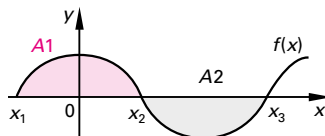
Flächen-
berechnung

$$A1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

$$A2 = - \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = \int_{x_3}^{x_2} f(x) dx$$

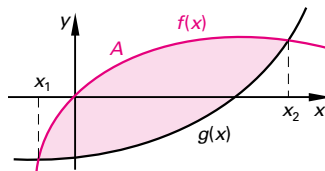
Flächenintegrale über der x-Achse sind positiv.

Flächenintegrale unter der x-Achse sind negativ.



$$A = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx$$

$f(x)$ = Oberkurve; $g(x)$ = Unterkurve
Die Fläche A zwischen den Schaubildern von $f(x)$ und $g(x)$ ist das Integral der Differenz Oberkurve – Unterkurve nach dx .



Integrations-
regeln

Faktorregel ($k = \text{const.}$)

$$\int_a^b [k \cdot f(x)] dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Summenregel

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) + g(x)] dx$$

Vertauschen der Grenzen

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Teilen des Integrationsintervalls

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

mit $a \leq b \leq c$

Extremwertberechnung

Extremwert-
berechnung
der Strecke
 $a(x) =$
 $f(x) - g(x)$;
der Fläche
 $a(x) = x \cdot f(x)$

$$a'(x) = 0 \Rightarrow x_1$$

x_1 ist die Stelle, an der $a(x)$ einen Extremwert hat.

$$a''(x_1) < 0$$

$$a''(x_1) > 0$$

$$a''(x_1) = 0$$

und

$$a'''(x_1) \neq 0$$

Maximum

Minimum

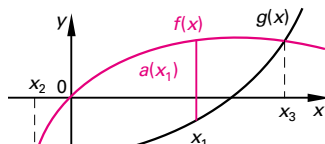
kein

$$a_{\max} = a(x_1)$$

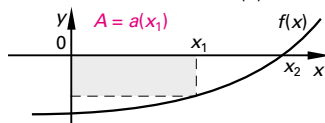
$$a_{\min} = a(x_1)$$

kein
Extremwert

Strecke $a(x)$:



Fläche $a(x)$:



Spezielle Integrationsverfahren und Integrationsregeln

Substitutionsregel

Für $f(x) = f[g(x)]$: $g(x) = z \Rightarrow z' = \frac{dz}{dx} = g'(x) \Rightarrow dx = \frac{dz}{g'(x)} \Rightarrow$

$$\int_a^b f[g(x)] dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) \frac{dz}{g'(x)} \Rightarrow \int_a^b f[g(x)] \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz$$

partielle Integration

$$\int_a^b \{f'(x) \cdot g(x)\} dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b \{f(x) \cdot g'(x)\} dx$$

Die Formeln werden bei speziellen Funktionen angewendet.

numerische Integration für eine gerade Anzahl von n Intervallen

Sehnentrapezregel:

$$\int_a^b f(x) dx \approx A_S = \frac{b-a}{n} \cdot \left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right]$$

Tangentenformel:

$$\int_a^b f(x) dx \approx A_T = 2 \cdot \frac{b-a}{n} \cdot [y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}]$$

Simpson'sche Formel:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{3} \cdot (2A_S + A_T) = \frac{b-a}{3n} \cdot \left[\frac{y_0}{2} + \frac{y_n}{2} + (y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 2 \cdot (y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) \right]$$

Kepler'sche Fassregel:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left[f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Die Kepler'sche Fassregel erhält man aus der Simpson'schen Formel für $n = 1$, wenn die Gesamtzahl der Intervalle $2n$ beträgt.

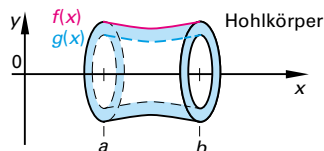
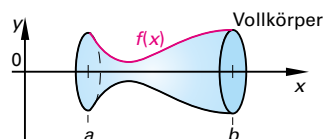
Rotationsvolumen

Rotation um die x -Achse:
Vollkörper:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Hohlkörper:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx$$



Rotation um die y -Achse:
Vollkörper:

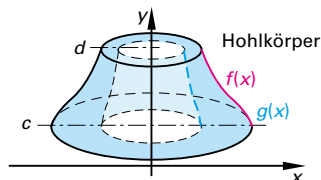
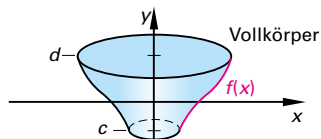
$$V_y = \pi \cdot \int_c^d [\bar{f}(y)]^2 dy$$

$\bar{f}(y)$ ist die Umkehrfunktion von $f(x)$.

Hohlkörper:

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d [\bar{f}(y)]^2 - [\bar{g}(y)]^2 dy$$

$\bar{g}(y)$ ist die Umkehrfunktion von $g(x)$.



Vektordarstellung in $\mathbb{R}^3$

$a_i \in \mathbb{R}$

Schreibweise

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Ein Vektor besteht aus Richtungskomponenten.

Vektorbegriff Alle gleich langen Pfeile gleicher Richtung beschreiben denselben Vektor. Ein einzelner Pfeil ist Repräsentant dieses Vektors.

Betrag

$$|\vec{a}| = a \quad \text{mit} \quad a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

a ist ein Skalar $\Rightarrow a \in \mathbb{R}$

Nullvektor

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

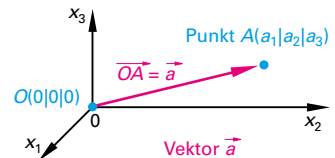
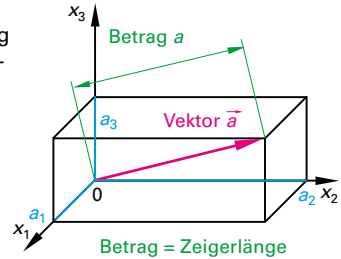
Der Nullvektor hat den Betrag 0 und keine bestimmte Richtung.

Ortsvektor

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Ein Ortsvektor hat den Pfeilanfang im Koordinatenursprung.

Die Richtungskomponenten eines Ortsvektors haben dieselben Werte wie die Koordinaten des Punktes an seiner Pfeilspitze.



Addition und Subtraktion

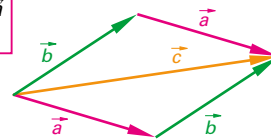
Vektoraddition

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

wobei $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Die Summe einer geschlossenen Vektorkette ist der Nullvektor:

$$\vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c}) = \vec{0}$$



Vektorsubtraktion

Verbindungsvektor:

$$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Gegenvektor:

$$\vec{e} = -\vec{d}$$

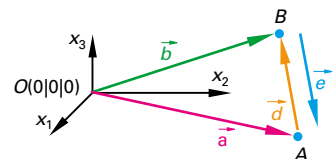
$$\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{e} = \overrightarrow{BA}$$

Vektor $\overrightarrow{AB}$ und Gegenvektor $\overrightarrow{BA}$ haben die gleiche Zeigerlänge:

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

$$|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AB}|$$



Skalare Multiplikation

$$m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Skalare Multiplikation
Wird ein Vektor mit einem Skalar m multipliziert, so erhält man einen parallelen Vektor.

$$\vec{b} = m \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} m \cdot a_1 \\ m \cdot a_2 \\ m \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

$m > 0$: richtungsgleiche Vektoren
 $m < 0$: entgegengerichtete Vektoren
 $|m| < 1$: $b < a$; $|m| > 1$: $b > a$

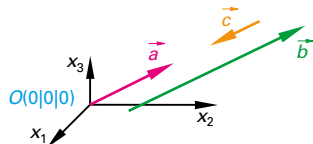
Rechengesetze
 $r, s \in \mathbb{R}$

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

$$(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$$

$$r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$



Einheitsvektoren

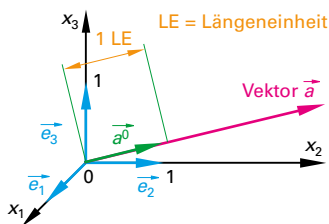
Begriff
Alle Einheitsvektoren haben den Betrag 1.

Formel

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a^0 = |\vec{a}^0| = 1$$

Basisvektoren
Basisvektoren = Einheitsvektoren der Koordinatenachsen

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_1 = e_2 = e_3 = 1$$



Strecke

Strecke

Streckenvektor: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

Streckenlänge: $|\overrightarrow{AB}|$

Mittelpunkt

Mittelpunktsvektor: $\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$

Mittelpunkt M: $M(m_1|m_2|m_3)$

Teilen der Strecke AB

im Verhältnis $m : n$ durch den Punkt P:

$$\vec{p} = \vec{a} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{AB}$$

nach m Längeneinheiten durch den Punkt Q:

$$\vec{q} = \vec{a} + m \cdot \overrightarrow{AB}^0$$

